QUADERNO







QUADERNOTREDICI

quaderni didattici

Quaderni didattici già pubblicati

QUADERNOUNO - L'erbario - MARISA VIDALI, CARLO GENZO, 2001

QUADERNODUE - Gli animali del giardino naturale - UMBERTO CHALVIEN, 2002

QUADERNOTRE - Il verde a Trieste - LIVIO POLDINI, 2003

QUADERNOQUATTRO - Le piante tintorie - ASS. TINTURA NATURALE "MARIA ELDA SALICE", 2003

QUADERNOCINQUE - Terapia orticolturale - ALESSANDRA CHERMAZ, 2003

QUADERNOSEI - I licheni e la qualità dell'aria - MIRIS CASTELLO, LUISA ZAPPA, 2004

QUADERNOSETTE - I tetti verdi e la bioarchitettura - FABRIZIO MARTINI, MASSIMO PALMA, ELENA DE VECCHI, 2005

QUADERNOTTO - Una passeggiata matematica - CARLO GENZO, LUCIANA ZUCCHERI, 2006

QUADERNONOVE - Appunti di erboristeria - L AURA MARZI, 2007

QUADERNODIECI – Fisiografia, la stampa naturale calcografica – FURIO DE DENARO, 2008

QUADERNOUNDICI – Piante in città – CARLO GENZO, FABRIZIO MARTINI, MASSIMO PALMA, 2009

QUADERNODODICI - Percorso geopaleontologico - DEBORAH ARBULLA, 2013





Civico Orto Botanico via Carlo de Marchesetti, 2 34142 – Trieste tel e fax: +39 040 360 068

e-mail: ortobotanico@comune.trieste.it

www.ortobotanicotrieste.it

© 2014 by Comune di Trieste Tutti i diritti riservati Prima edizione novembre 2014

ISBN 978-88-95317-08-3





CARLO GENZO, ALESSANDRO LOGAR

Margherite e spirali, cavolfiori e frattali

Una passeggiata matematica II

Carlo Genzo Laureato in Scienze Naturali, insegnante nella scuola secondaria, autore di numerosi articoli di carattere scientifico, divulgativo e didattico, ha collaborato nella preparazione di testi scolastici di scienze. Supervisore presso l'Università di Trieste per la formazione degli insegnanti. Alessandro Logar professore associato di Algebra presso il Dipartimento di Matematica e Geoscienze dell'Università di Trieste, insegna nei corsi della laurea triennale e magistrale in matematica e in geologia; si occupa di ricerche nell'ambito degli aspetti computazionali e algoritmici dell'algebra.

Introduzione

La Natura è ricca di forme geometriche. Le possiamo trovare dappertutto: nei cristalli, nelle rocce, nelle nuvole; nel mondo vegetale come in quello animale: basti pensare alle molteplici simmetrie dei fiori, ad una stella marina, al guscio di una chiocciola o alla complessa forma di una fronda di felce.

La matematica è sempre stata utilizzata (qualcuno potrebbe dire: a torto o a ragione), per interpretare e spiegare la Natura. Probabilmente una delle ragioni del suo successo sta proprio nel fatto che grazie alla matematica si riescono a comprendere e collegare tra loro i fenomeni naturali; inoltre lo studio della realtà fisica ha a sua volta stimolato e sviluppato interi settori matematici.

Osservare quindi un fiore, una foglia o un frutto per scoprire quale e quanta matematica possa essere nascosta in essi è un'attività stimolante e, anche se non è certamente nuova, può riservare ancora grandi sorprese.

Si pensi all'esempio di una pianta comune come una margherita. In essa è celata una molteplicità di strutture matematiche. A cominciare da quelli che comunemente si chiamano "petali", il cui numero non è casuale, ma solitamente è uno dei numeri della successione di Fibonacci; si pensi ai fiorellini gialli che costituiscono il disco centrale dell'infiorescenza, i quali si dispongono con una sorprendente regolarità, tanto da sistemarsi lungo delle spirali (chiamate in matematica *spirali di Fermat*) sviluppate sia in verso orario, sia in verso antiorario e non solo: contando le spirali orarie o quelle antiorarie si trovano ancora numeri di Fibonacci. Infine anche le brattee di una margherita (le foglioline che avvolgono alla base l'infiorescenza) danno ancora una volta numeri di Fibonacci.

Molte altre piante (soprattutto della famiglia delle Composite o Asteracee, ma non solo) condividono proprietà simili a quelle della margherita, tanto che risulta senz'altro interessante soffermarsi a guardarle più nei dettagli per meglio capire in cosa si eguaglino e in cosa si differiscano.

Se le proprietà "matematiche" delle Asteracee sono note già da vari secoli (anche se va notato che una spiegazione convincente della disposizione a spirale dei fiori tubulosi è stata data appena nella seconda metà del secolo scorso, vedi [15, 13, 12, 10, 8]), per altre piante, invece, la creazione di uno strumento matematico in grado di spiegare la loro struttura è avvenuta solo in anni relativamente recenti. Ci riferiamo agli organismi la cui forma è assimilabile a quella di un *frattale*, concetto matematico sorto appena nella metà del secolo scorso per opera di Mandelbrot (v. [9]).

In questo volumetto, seguendo le tracce di quanto già predisposto in: "Una passeggiata matematica", [6], vogliamo soffermarci ad analizzare due categorie di piante: quelle, come la margherita, il girasole, il pino e altre ancora nelle quali i fiori o, rispettivamente, le squame legnose delle pigne celano, in vario modo, numeri di Fibonacci e quelle invece (come le felci o le ombrellifere) la cui struttura è ben rappresentata da un frattale. Poiché il modo migliore per comprendere è quello di sperimentare, abbiamo pensato di seguire in questa presentazione un approccio il più possibile costruttivo, predisponendo quindi del software (v. http://www.dmi.units.it/~logar/mescef) che permette di ricostruire alcuni aspetti dei vegetali esaminati. In questo modo il lettore interessato può sia ripetere gli esempi qui trattati, sia soprattutto sperimentarne di nuovi.

Il primo capitolo introduce alcune Asteracee, spiega quali siano le caratteristiche peculiari e presenta un possibile modello matematico che riesca a simulare la disposizione a spirali dei fiori tubulosi o delle brattee. Sono state costruite alcune schede che mostrano esempi di vari fiori e la loro simulazione effettuata per mezzo del programma sopra indicato. L'appendice del capitolo spiega invece nei dettagli come utilizzare il software in modo che si possa facilmente sperimentarlo.

Il secondo capitolo è un intermezzo dedicato in parte all'arte, in parte agli approfondimenti matematici. La successione di Fibonacci, introdotta nel primo capitolo, è infatti intrinsecamente legata al numero aureo (la "Divina Proporzione", secondo Luca Pacioli) e la Divina Proporzione ha fortemente condizionato l'architettura, la pittura e la scultura in molte epoche. Non si poteva quindi non soffermarsi almeno un istante su alcuni aspetti artistici. Seguono poi degli approfondimenti matematici. Si fa cenno al legame che intercorre tra la successione di Fibonacci e il numero aureo e si sviluppano esplicitamente alcuni calcoli relativi al pentagono regolare, esempio importante, perché la definizione del rapporto aureo è stata introdotta dagli antichi greci proprio in conseguenza dello studio delle proprietà geometriche di questa figura.

Nel terzo capitolo si introducono i frattali, si spiegano alcune loro proprietà e si mostra come l'aspetto di molti vegetali possa essere imitato per mezzo di questi oggetti geometrici. Anche qui, come nel primo capitolo, il lettore ha a disposizione un software in grado di costruire un qualunque frattale, a partire da alcuni semplici dati, il cui utilizzo viene spiegato nell'appendice. Nel capitolo si trova anche una veloce descrizione dell'insieme di Mandelbrot, fatta nel modo più diretto possibile.

Si è cercato di mantenere la trattazione degli argomenti ad un livello elementare anche se in alcune parti, soprattutto quando si approfondisce la matematica, non si può sfuggire da qualche conto che a qualcuno potrebbe risultare un po' ostico. Per questo motivo alcune sezioni sono precedute da un asterisco: esso serve a mettere sull'avviso il lettore che l'argomento richiede qualche nozione matematica. Per non appesantire la trattazione, si è comunque cercato di sviluppare i temi trattati in modo che le sezioni marcate da un asterisco possano essere saltate, senza con ciò precludere la comprensione delle rimanenti parti del testo.

Auspichiamo infine che il presente lavoro possa essere proficuamente utilizzato sia dagli studenti delle scuole superiori, a cui è espressamente rivolto, sia dai loro insegnanti.

CAPITOLO 1

Margherite e spirali

Punti, rette, piani, triangoli, quadrati, . . . sono tutti concetti geometrici ben noti ad ognuno di noi. Poiché però nascono da un processo di astrazione della realtà, non è facile ritrovarli in natura. Certo, un abete, in prima approssimazione, può essere disegnato schematicamente come un triangolo isoscele o il fiore di una margherita come un cerchio, ma se andiamo a studiare con maggiore attenzione il dettaglio di una pianta, di un fiore o anche di un sasso, di una linea di costa, del guscio di una chiocciola, troviamo forme geometriche più complesse che spesso non è ragionevole pensare di approssimare con semplici cerchi, triangoli o segmenti. Inoltre, in molte piante o in certi fiori o in alcuni frutti si trovano, nascoste, ulteriori strutture matematiche complesse che per essere comprese richiedono dello studio.

In questo primo capitolo analizzeremo alcuni modelli di fiori e frutti che hanno una curiosa struttura in comune . . .

1.1 Sfogliando una margherita: da "m'ama, non m'ama" alla successione di Fibonacci

È noto il passatempo che consiste nello sfogliare i "petali" di una margherita, pronunciando "m'ama" quando si strappa il primo, "non m'ama" quando si strappa il secondo e così via, alternativamente. Secondo la tradizione, l'ultimo "petalo" strappato dovrebbe rappresentare la condizione in cui si trova l'interrogante che si diletta con questo piccolo passatempo. E chiaro che se i "petali" della margherita sono pari, l'ultima frase pronunciata sarà "non m'ama", al contrario,

se sono dispari, la frase sarà "m'ama". E più probabile che la filastrocca termini con "m'ama" o con "non m'ama"? In altre parole, è più probabile che i "petali" di una margherita siano in numero pari o in numero dispari? Prima di approfondire questa domanda, facciamo un breve intermezzo di terminologia botanica. Va infatti spiegato perché la parola "petalo" sia stata posta tra virgolette. Sebbene il sostantivo "petalo" sia regolarmente usato nel linguaggio comune a proposito delle margherite e di piante a fiore simili, esso risulta scientificamente improprio.

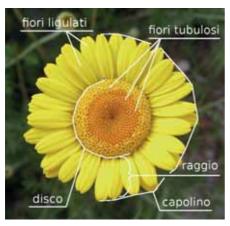


Figura 1.1: Denominazioni dell'infiorescenza

In botanica si distinguono infatti fiori da infiorescenze, essendo quest'ultime formate da raggruppamenti ordinati di fiori. Nelle margherite, e in altre specie con struttura simile, come le pratoline, la camomilla, i girasoli, ecc., quello che sembra avere la forma di un fiore risulta essere in realtà una infiorescenza formata da fiori molto piccoli addossati l'uno all'altro. Questa particolare infiorescenza viene denominata capolino. I fiori centrali, che formano il disco, sono fiori tubulosi, che si suddividono superiormente in 5 piccoli lembi, mentre i fiori

esterni, che costituiscono i *fiori del raggio*, quelli che appunto vengono indicati, in modo impreciso, con il termine di "petali", sono in effetti fiori derivati dai precedenti, però con uno dei 5 lembi che si sviluppa molto di più *(fiori ligulati)* (figura 1.1).

Tutto ciò può essere verificato con una attenta osservazione dell'infiorescenza, per mezzo di una lente. Per essere più precisi, va anche notato che in molte specie della famiglia delle Asteracee o Composite¹, esistono solo i fiori del disco (ad es. nel farfaro, nell'assenzio, ecc.), mentre in altre esistono solo i fiori del raggio (ad es. nella dalia, nel dente di leone, ecc.). Una situazione più complessa si rivela nella stella alpina, dove abbiamo numerose infiorescenze ciascuna solamente con fiori del disco, contornate esternamente da foglie con peli argentei che simulano grandi petali.

Insomma, per tornare al nostro problema iniziale, contare i "petali" di una margherita corrisponde a contare i suoi fiori del raggio. E dunque la domanda che abbiamo formulato in precedenza, ora diventa: "In una margherita è più probabile che ci sia un numero pari o un numero dispari di fiori del raggio?" È ovvio che questa domanda corrisponde a quella analoga: "In una popolazione di mar-

¹ Il nome tradizionale della famiglia è Composite, sostituito dal nome moderno di Asteracee.



Figura 1.2: Numeri di Fibonacci che compaiono contando i fiori ligulati di due margherite

gherite, quelle con un numero di fiori del raggio pari compaiono con la stessa frequenza delle margherite con un numero di fiori del raggio dispari? Oppure c'è una prevalenza di un gruppo sull'altro?"

Per cercare di rispondere a questa domanda bisogna adottare il metodo sperimentale, ossia contare (contare, non strappare!) uno ad uno i fiori del raggio, e rifare questa conta per un adeguato numero di esemplari². Cosa significa "numero adeguato"? La teoria statistica afferma che per ottenere un campione significativo è opportuno effettuare questi conteggi esaminando almeno una trentina di esemplari diversi. Naturalmente, quanto maggiore è il numero di individui esaminati, tanto più significativo sarà il risultato ottenuto.

Si avranno probabilmente risultati differenti, a seconda dell'individuo esaminato. Mettendo tuttavia i risultati su un istogramma, avente per ascissa il numero dei fiori del raggio (fiori ligulati) e per ordinata la frequenza delle infiorescenze, si potrà notare che i valori si dispongono intorno a questi numeri:

I numeri maggiori, come 55 e 89 più che nelle margherite, si possono trovare in altre piante della stessa famiglia, come, ad esempio, le pratoline. La domanda che subito ci si pone è la seguente: "Ma questi numeri sorgono a caso, come nell'estrazione di una lotteria? Oppure dietro ad essi c'è una regola, un qualche ordine nascosto, che permette di trovarne nella sequenza anche altri, più piccoli o più grandi?"

I numeri scritti sopra hanno una lunga storia, che risale a Leonardo Fibonacci (Pisa, 1170 ca – Pisa, 1250 ca), un matematico del XIII secolo. Studiando il pos-

² Le infiorescenze esaminate possono appartenere allo stesso individuo o a individui diversi, purché della stessa specie.

sibile modo in cui cresce una popolazione di conigli, egli scoprì quella che ora, in suo onore, si chiama successione di Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...



Figura 1.3: Le brattee di una pratolina

La regola per ottenere i numeri scritti è la seguente: ogni elemento (a partire dal terzo) è la somma dei due elementi che lo precedono. Ad esempio 5 = 2+3, 8 = 3+5, 233 = 89 + 144. In formula, se indichiamo con F_I , F_2 ,..., F_n ,... gli elementi della successione, abbiamo:

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}.$$
 (1.1)

La successione è formata naturalmente da infiniti elementi, in quanto dati due qualunque numeri consecutivi della successione, per quanto grandi, si può sempre calcolare

quello successivo. Ed ecco che (ma questo non l'ha scoperto Fibonacci!³), se, come abbiamo visto sopra, ci rivolgiamo alla botanica, notiamo che alcuni di questi numeri corrispondono (o si avvicinano) proprio ai primi numeri della successione precedentemente trovata. Ovviamente in natura si osservano spesso valori vicini a quelli teorici, ma non sempre coincidenti, per una serie di cause perturbanti. Nel caso qui esaminato, è sempre possibile che qualche fiore del raggio sia precocemente caduto o qualche altro si sia sdoppiato per un'anomalia della crescita. Talvolta si osserva in natura anche la maggiore frequenza intorno a questi numeri: ..., 3, 4, 7, 11, 18,... che costituiscono una successione anomala. Tuttavia, anche in questa successione, ogni elemento continua ad essere generato con la stessa regola della successione di Fibonacci, ossia risulta essere la somma dei due elementi a lui precedenti.

A questo punto, dopo l'incursione nel mondo matematico di Leonardo Fibonacci, abbiamo qualche informazione in più per provare a dare una risposta anche alla semplice domanda da cui eravamo partiti. "E più probabile che, contando i fiori ligulati di una margherita (o di un'altra pianta della stessa famiglia) esca *m'ama* oppure *non m'ama*?"

Vediamo. In pratica, possiamo considerare che i fiori ligulati del disco siano compresi tra un numero superiore a 4 ed inferiore ad un centinaio. In questo in-

J. Keplero (1571–1630) è stato probabilmente il primo a collegare la successione di Fibonacci con aspetti botanici, in particolare nelle sue ricerche sulla fillotassi, la quale studia la disposizione delle foglie sui rami. Successivamente, A. Schimper (1803–67), A. Braun (1805–77) e A. Bravais (1811–63) riconobbero la corrispondenza tra gli elementi fiorali e la successione.





Figura 1.4: Le spirali formate dai fiori tubulosi

tervallo, appaiono 7 numeri della successione di Fibonacci, di cui 5 sono dispari e solo 2 pari. Quindi, se il numero dei fiori ligulati si distribuisce in modo abbastanza omogeneo attorno ai 7 numeri della successione, dovrebbe essere avvantaggiata la frequenza di valori dispari col risultato che, se la filastrocca parte da un *m'ama*, all'ultimo fiore ligulato corrisponderà di nuovo un *m'ama*. Sarà proprio così? Non resta che contare! (A proposito di contare: se provate a vedere quanti fiori ligulati ci sono nella figura 1.1, troverete che sono 34, ancora un numero di Fibonacci).

La sequenza di Fibonacci si trova anche in altri elementi dell'infiorescenza. Come esempio, provate a contare le brattee di una margherita, o di altra composita⁴: ed anche in questo caso, troverete che il totale è, normalmente, un numero della suddetta successione (vedi figura 1.3).

Ed ora, che ci avete preso gusto, vorreste magari contare i fiori tubulosi della margherita, anche se qui il conteggio diventa molto più arduo, perché essi sono molto piccoli, molto numerosi, e quelli disposti più al centro non si vedono quasi. Se guardiamo però la loro disposizione (v. figura 1.4), notiamo delle regolarità molto curiose, ad esempio vediamo che si dispongono lungo delle curve che partono dal centro del disco giallo della margherita e vanno verso la periferia . . . Curve? Abbiamo detto "curve"? Allora forse bisogna fare una digressione matematica.

⁴ per brattee si intendono le parti verdi che avvolgono alla base il capolino.

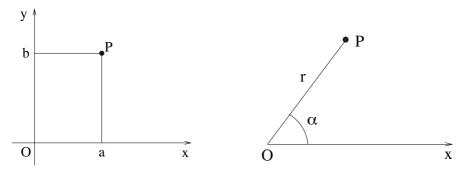


Figura 1.5: Coordinate cartesiane (a sinistra) e polari (a destra) di un punto nel piano

1.2 Dalle circonferenze alle spirali

Prendiamo una corda (lunga un paio di metri) e facciamo due cappi alle sue estremità. Poi fissiamo un paletto nel terreno, inseriamo in esso uno dei due cappi e nell'altro inseriamo un picchetto che facciamo scorrere sul terreno in modo da tracciare un solco tenendo la corda sempre tesa. Questo è il modo usato dai giardinieri, fin dall'antichità, per disegnare una circonferenza. Se vogliamo esprimere il concetto in termini matematici, abbiamo tracciato il luogo geometrico dei punti di un piano equidistanti da un punto fisso (detto centro della circonferenza). Se ora blocchiamo il cappio inserito nel paletto in modo che non possa scorrere e quindi debba avvolgersi attorno al paletto stesso, il picchetto traccerà sul terreno una linea curva che chiamiamo spirale. In questo esempio, la distanza tra due spire consecutive (dette anche bracci) sarà costante (e uguale alla lunghezza della

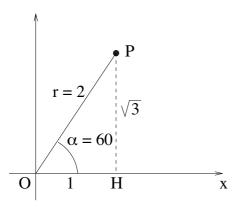


Figura 1.6: Dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari

circonferenza del paletto fissato nel terreno). Descrivere matematicamente una spirale non è poi così immediato, ma è molto utile perché permette di capire che ci possono essere molti tipi differenti di spirali. Il modo più naturale fa ricorso ad un sistema di riferimento del piano che porta il nome di *sistema di riferimento in coordinate polari*. Probabilmente è ben noto che, fissato un sistema di riferimento nel piano costituito da due assi ortogonali (convenzionalmente chiamati asse *x* o delle

ascisse e asse y o delle ordinate) un punto nel piano può essere individuato con due numeri reali (a, b) detti le *coordinate del punto*. Viceversa, dati due numeri reali a e b, essi individuano univocamente un punto del piano (che è quello di coordinate (a, b)) (si veda la figura 1.5, a sinistra).

Il sistema di riferimento degli assi cartesiani ortogonali non è però l'unico possibile; vediamone uno alternativo: se nel piano fissiamo una semiretta x con origine in un punto O, possiamo individuare ogni punto P del piano (ad eccezione di O) con i seguenti due numeri: un numero positivo r dato dalla distanza di P dal punto O e un angolo α tra la semiretta x e la semiretta OP (si veda la figura 1.5, a destra). Viceversa, dato un numero reale positivo r e un angolo α , essi individuano univocamente (se $0^{\circ} \le \alpha < 360^{\circ}$) un punto P del piano tale che la distanza di P da O sia r e l'angolo tra la semiretta x e la semiretta OP sia α . Ad esempio il punto P di coordinate cartesiane $(1, \sqrt{3})$, in coordinate polari è la coppia $(2, 60^{\circ})$ [ecco velocemente il perché: se P ha coordinate $(1, \sqrt{3})$, la sua distanza da O — per il teorema di Pitagora — è 2 e il triangolo OP H, dove H è la proiezione sull'asse x di P, è metà di un triangolo equilatero, quindi l'angolo in O vale 60°, come si vede in figura 1.6]. Una volta fissato un sistema di riferimento in coordinate polari, è molto semplice indicare l'equazione che descrive una spirale del tipo considerato in precedenza: essa infatti è data dall'insieme dei punti del piano espressi in coordinate polari (r, α) tali che

$$r = k\alpha$$
.

dove k è un numero costante fissato. L'equazione esprime il fatto che r è proporzionale ad α , cioè la distanza del punto P da O cresce proporzionalmente con l'angolo α , quindi più è grande l'angolo, più ci si allontana dal punto O. Naturalmente in questa descrizione è lecito consentire all'angolo α di superare il valore di 360° .

Ripensiamo all'esempio della corda che si avvolge sul paletto (pensiamolo situato in *O*) e immaginiamo di essere nella situazione in cui la corda sia già del



Figura 1.7: La spirale di Archimede. I bracci sono a distanza costante.

tutto avvolta. Disegniamo (o immaginiamo di disegnare) sul terreno una semiretta con origine in O che rappresenta il semiasse x. Se ora spostiamo il picchetto in modo da srotolare la corda, ritracciamo ovviamente la spirale precedentemente disegnata (anche se a ritroso) e si intuisce facilmente che essa è effettivamente costituita da punti P che tanto più si distanziano da O quanto più grande è l'angolo α tra x e la corda OP. Una spirale descritta dall'equazione $r = k\alpha$ si chiama spirale di Archimede; in essa i bracci sono a distanza costante. (v. figura 1.7).

Quella di Archimede non è l'unica spirale interessante. Altri tipi di spirali si ottengono considerando varianti dell'equazione $r = k\alpha$. Tra le più note, vi è:

- la *spirale di Fermat* (data dall'equazione $r = k \sqrt{\alpha}$, dove anche ora k è una costante);
- la *spirale iperbolica* (di equazione $r = k/\alpha$, k costante);
- la *spirale logaritmica* (di equazione $r = ck^{\alpha}$, dove c e k sono costanti).

Nella figura 1.8 sono rappresentate queste tre spirali.

Un'ultima curiosità. Anche la circonferenza può essere descritta in modo molto semplice per mezzo delle coordinate polari che qui abbiamo utilizzato per definire le spirali. Come detto, una circonferenza è costituita da tutti i punti del piano che sono ad una distanza fissa (diciamo k) da O, quindi sono tutti i punti P del piano tali che, per qualunque valore di α , valga: OP = k. In altre parole, l'equazione della circonferenza centrata in O in coordinate polari è, semplicemente, P = k.

Tra tutte le spirali, quella più interessante per la descrizione dei fiori tubulosi della margherita (e del girasole e di altre Asteracee) sembra essere la spirale di Fermat. A breve vedremo il perché, ma ora torniamo alla botanica.

Nel caso delle Asteracee, i fiori tubulosi più vecchi sono spinti nella parte esterna del disco da quelli più giovani che si formano progressivamente nella zona centrale e l'effetto complessivo è che si formano delle linee curve che assomigliano proprio a delle spirali, come si vede chiaramente nella figura 1.4.

È possibile contare le spirali nel seguente modo. Si parte da un fiore tubuloso disposto sul bordo esterno del disco, ed esso viene colorato con un pennarello. Con lo stesso pennarello si colorano gli altri fiori appartenenti alla stessa spirale del primo. Resta così tracciata una spirale che dalla periferia si dirige verso la zona centrale del disco. Di questa spirale si può individuare l'andamento complessivo: esso risulterà "orario" se piega, a partire dal centro, dalla stessa parte in cui ruotano le lancette di un orologio, "antiorario" nel caso opposto. Individuata così questa spirale, si contano tutte le successive che hanno lo stesso andamento della prima, fino a ritornare alla spirale immediatamente precedente a quella contrassegnata col colore del pennarello.

Contate così le spirali, ad esempio orarie, si potrà poi eseguire la stessa operazione contando quelle antiorarie individuate. E ancora una volta . . . si troverà

⁵ Per motivi pratici è opportuno eseguire il conteggio su infiorescenze grandi, come quella del girasole, del topinambur (patata americana), . . . o almeno su quella di una grande margherita.

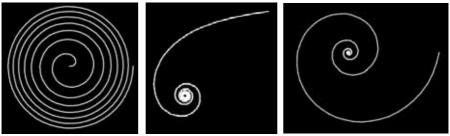


Figura 1.8: Le spirali di Fermat, iperbolica e logaritmica

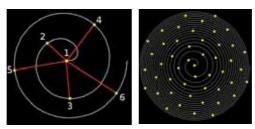


Figura 1.9: I fiori tubulosi si dispongono lungo una spirale di Fermat. L'angolo formato congiungendo due fiori consecutivi con il centro della spirale è di 137° 30'. A sinistra sono raffigurati solo 6 fiori, a destra una sessantina.

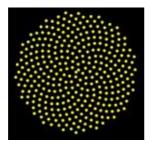
che le spirali nei due sensi di rotazione ripropongono numeri di Fibonacci (o valori ad essi molto vicini). Inoltre tali numeri risultano essere generalmente consecutivi, qualche volta uguali, nella sequenza di Fibonacci, come si può verificare ancora una volta con il conteggio di una quantità sufficiente di individui.

1.3 Un modello matematico

Per dare una giustificazione matematica alla disposizione dei fiori tubulosi della margherita o del girasole, è stato proposto un modello matematico che si può così sintetizzare:

- 1. i fiori tubulosi che via via si sviluppano, si dispongono su una spirale di Fermat;
- i fiori occupano posizioni tali che, congiungendo due fiori nati consecutivamente con il centro della spirale, si ottiene sempre un angolo di circa 137° 30'.

Vediamo ora come da queste due regole si riescano ad ottenere simulazioni di fiori che sono molto aderenti alla realtà. Per far vedere come i fiori tubulosi si



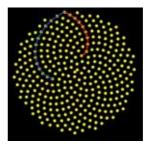


Figura 1.10: Quando i fiori tubulosi sono sufficientemente numerosi (nel disegno, circa 300) si formano delle spirali. In questo caso sono 21 in senso orario (blu) e 34 in senso antiorario (rosso).

devono sviluppare, nella figura 1.9 è disegnata in bianco una spirale di Fermat su cui sono stati evidenziati alcuni punti, etichettati con 1, 2, 3, ... che rappresentano i fiori tubulosi. Il fiore 1 è quello appena nato e si trova nell'origine della spirale di Fermat, quello nato immediatamente prima è il numero 2, quello nato immediatamente prima del 2 è il numero 3 e così via. In accordo con l'istruzione 2), i punti 2, 3, 4, 5, 6 sono stati disegnati in modo che l'angolo che si forma congiungendo il fiore 2 e il fiore 3 con l'origine o il fiore 3 e il fiore 4 con l'origine ecc., sia sempre di 137° 30'. Finché i fiori sono pochi, non è immediato riscontrare una particolare regolarità nella loro disposizione, ma quando sono più numerosi (si veda il secondo disegno di figura 1.9) si incomincia a intravvedere una disposizione particolare. Quando i fiori sono circa 300, come nella figura 1.10, si può notare che il modello proposto sembra ricordare molto da vicino un caso reale. La spirale di Fermat descritta nel primo punto del modello matematico introdotto, non è stata qui tracciata, perché le sue spire, essendo troppo ravvicinate, andrebbero a coprire tutto il disegno. Si osservi però che anche adesso, come nell'esempio della margherita analizzato nella figura 1.4, si formano alcune curve, due delle quali (una in rosso e una in blu) sono evidenziate nella seconda parte della figura 1.10. Si può calcolare (qui omettiamo i dettagli) che la curva rossa e la curva blu sono effettivamente spirali di Fermat (ognuna con una diversa costante k), che chiameremo spirali secondarie. Inoltre, per ottenere, a partire dal primo, tutti i fiori della spirale blu, si deve selezionare un fiore ogni 21, mentre per ottenerne quelli rossi, si deve selezionare un fiore ogni 34. Questo comporta che nella figura 1.10 ci sono 21 spirali simili alla spirale blu e 34 spirali simili alla spirale rossa.

Vediamo ancora un altro caso di simulazione di un fiore con il modello matematico proposto. Consideriamo la figura 1.11. In questo caso la spirale di Fermat descritta nel punto 1) è stata fatta continuare fino a raggiungere circa 250 spire, di modo che i fiori disegnati sono circa 700. Anche qui i fiori si dispongono con delle regolarità e in particolare si osservano nuovamente delle spirali secondarie,

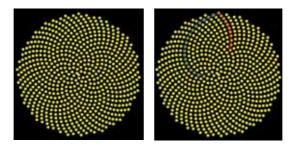


Figura 1.11: Simulazione della disposizione dei fiori del girasole (circa 700 fiori)

due delle quali sono evidenziate nel secondo disegno della figura 1.11. Il numero totale delle spirali simili alla blu sono 34, il numero totale di quelle simili alla rossa, sono 55. Si noti che i numeri delle spirali che abbiamo ottenuto in queste simulazioni (la coppia (21, 34) e la coppia (34, 55)) sono numeri di Fibonacci e sono consecutivi.

Riassumendo, quindi, la situazione è la seguente: il modello matematico prevede che i fiori (di una margherita o di un girasole. . .) si dispongano lungo una spirale di Fermat (che in verità non è ben visibile quando si osserva una margherita o un girasole) secondo la regola che prevede che tra un fiore e quello successivo ci sia un angolo fissato (di circa 137° 30'). La disposizione dei fiori che avviene con questa regola fa sì che in modo naturale si vengano ad evidenziare delle spirali (alcune in senso orario, altre in senso antiorario) che a loro volta sono delle spirali di Fermat, queste sì del tutto visibili quando si osserva il fiore. Contando queste spirali si ottengono numeri della successione di Fibonacci.

Perché nel punto 1) si richiede che i fiori si dispongano su una spirale di Fermat?

Perché l'angolo di 137° 30' sembra rivestire un ruolo così importante?

Senza entrare troppo nei dettagli matematici, cerchiamo ora di dare una risposta a queste due domande, per giustificare così il modello matematico proposto. Vediamo intanto la prima delle due questioni: perché proprio una spirale di Fermat? Pensiamo al seguente esperimento: prendiamo un foglio di carta assorbente e, con un contagocce, facciamo cadere una goccia di inchiostro nero sul foglio. Dopo qualche istante, quando l'inchiostro sarà assorbito dalla carta (diciamo dopo un minuto), si formerà un disco nero. Supponiamo che sia A l'area di questo disco. Senza muovere né il contagocce, né la carta, facciamo cadere una seconda goccia di inchiostro. Dopo un altro minuto (e cioè dopo 2 minuti dall'inizio dell'esperimento) il disco nero si sarà allargato, più precisamente, la sua area sarà 2A, semplicemente perché è raddoppiato l'inchiostro. Quindi a t=2 abbiamo una macchia di area 2A. Se facciamo cadere una terza goccia di in-

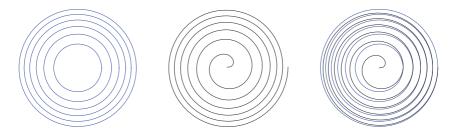


Figura 1.12: Sei cerchi concentrici di raggio, rispettivamente, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $2 = \sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{6}$ (a sinistra); i primi sei bracci della spirale di Fermat di equazione $r = \sqrt{\alpha}$ (al centro) e la sovrapposizione dei due grafici (a destra).

chiostro, dopo un altro minuto, cioè al tempo t=3, otteniamo una macchia di area 3A e così via. Assumendo che le macchie siano di forma circolare, il raggio della prima macchia, al tempo t=1, sarà r_1 tale che $r_1^2\pi=A$, il raggio della seconda macchia, al tempo t=2, sarà r_2 , tale che $r_2^2\pi=2A$, il raggio della terza sarà r_3 , tale che $r_3^2\pi=3A$ e così via. Da queste equazioni si ricava che $r_2=r_1$ $\sqrt{2}$, $r_3=r_1$ $\sqrt{3}$ e, in generale, la macchia, dopo n minuti, avrà raggio $r_n=r_1$ \sqrt{n} (dove r_1 è una costante, corrispondente al raggio della prima macchia). Abbiamo così ottenuto una sequenza di circonferenze concentriche di raggi r_1 , r_2 , r_3 ,..., r_n .

La figura 1.12 mostra, a sinistra, l'esempio delle prime 6 circonferenze di questa sequenza. L'equazione

$$r_n = r_1 \sqrt{n}$$

ora determinata assomiglia molto all'equazione $r=k\sqrt{\alpha}$, che fornisce la spirale di Fermat e quindi non è sorprendente constatare che le sei circonferenze della figura 1.12 sono una approssimazione dei primi sei bracci della spirale di Fermat (rappresentata al centro, nella stessa figura). Sovrapponendo i due grafici, si ottiene il terzo disegno della figura 1.12. La macchia che si viene a formare facendo gocciolare l'inchiostro sulla carta assorbente è un fenomeno discreto, che si sviluppa in intervalli costanti di tempo. In questo caso la macchia è racchiusa in un numero finito di circonferenze via via più grandi. Se invece l'inchiostro scendesse con continuità, astraendo il conto ora sviluppato, sarebbe naturale attendersi che la macchia si sviluppi in modo tale che il suo perimetro sia via via contenuto in cerchi il cui raggio cresce proporzionalmente alla radice quadrata del tempo e quindi il raggio sarebbe, istante per istante, determinato da un punto su una spirale di Fermat che risulta quindi un'astrazione matematica del fenomeno dell'espansione delle gocce di inchiostro sulla carta assorbente. L'analogia con lo sviluppo dei fiori di un girasole o di una margherita dovrebbe essere abbastanza naturale:

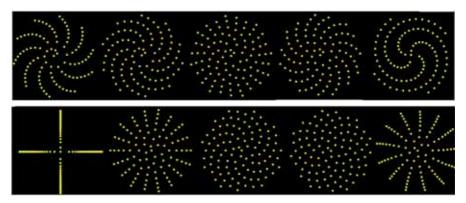


Figura 1.13: Disposizione dei fiori nel modello matematico proposto, in dipendenza dell'angolo formato tra due fiori consecutivi e il centro del disegno. In ciascuno dei 10 disegni i fiori sono circa un centinaio. Gli angoli scelti sono, rispettivamente, 36° 30', 37° 0', 47° 0', 47° 30', 87° 30'(sopra) e 90° 0', 100° 0', 132° 0', 137° 30', 138° 30'(sotto). La disposizione più efficiente si ha nel quarto disegno di sotto, dove l'angolo vale 137° 30'.

la goccia di inchiostro rappresenta i fiori prodotti dalla pianta in un certo intervallo di tempo. È lecito aspettarsi che la pianta produca sempre lo stesso numero di fiori nello stesso intervallo di tempo che devono sistemarsi sul disco del capolino, similmente a come l'inchiostro viene assorbito dalla carta. Abbiamo dato pertanto una giustificazione del perché, come richiesto nel passo 1) del modello matematico, i fiori devono stare su una spirale di Fermat.

Per quel che riguarda la seconda domanda e cioè: "Perchè proprio un angolo di 137° 30'?" la spiegazione completa richiederebbe alcuni passaggi matematici abbastanza tecnici. Possiamo però dare, per ora, una prima giustificazione sperimentale. Partendo dal presupposto che i fiori devono distribuirsi nella maniera più efficiente possibile in modo da non sprecare spazio e non sovrapporsi gli uni agli altri, proviamo a vedere cosa succede se sostituiamo altri valori all'angolo utilizzato nel punto 2), mantenendo il numero dei fiori costante (nel nostro esempio, circa 100).

Nella figura 1.13 abbiamo assegnato i seguenti valori all'angolo (scelti in modo del tutto arbitrario): 36° 30', 37° 30', 47° 30', 47° 30', 87° 30' (nel disegno di sopra) e, nell'ordine, 90° 0', 100° 0', 132° 0', 137° 30', 138° 30' nel disegno di sotto. Come si vede, la distribuzione "più efficiente" dei fiori, almeno per quel che riguarda questi esempi, è proprio 137° 30'. C'è però ancora un legame tra l'angolo 137° 30' e la successione di Fibonacci che avremo modo di approfondire. Si potrebbe pensare che solo la famiglia delle Asteraceae abbia questi com-

portamenti particolari, ma questo è assolutamente falso. Basterà infatti osservare le squame delle pigne di un pino, le squame di un ananas, quelle della cupola di una ghianda, o le brattee di un carciofo⁶, ecc. per accorgersi, anche in questi casi, che le strutture intorno all'asse centrale sono disposte a spirale.

Inutile aggiungere che anche in questi casi il totale delle spirali ripropone numeri della sequenza di Fibonacci. Nella prossima sezione, approfondiremo quindi l'analisi di alcuni di questi casi.

1.4 Simulazioni

Consideriamo ora alcuni esempi per meglio capire come utilizzare il modello matematico proposto nella precedente sezione. Per ogni esempio esaminato, considereremo una possibile simulazione ottenuta utilizzando un apposito software che permette di descrivere la disposizione dei fiori o delle brattee seguendo proprio le regole 1 e 2 descritte nella sezione precedente. Si potrà così constatare come la simulazione matematica riesca a imitare quanto si presenta in natura. Per ogni esempio verrà inoltre data una breve scheda descrittiva.

⁶ Anche il carciofo appartiene alle Asteraceae. Nel carciofo, le "foglie" commestibili sono le brattee dell'infiorescenza a capolino, in uno stadio che precede l'apertura dei fiori.

Nome Scientifico	Pinus halepensis Mill.
Nome volgare	Pino d'Aleppo
Famiglia	Pinacee
Area distribuzione	Coste Mediterraneo orientale
Ambiente di crescita	Luminoso e arido
Spirali orarie	8
Spirali antiorarie	13



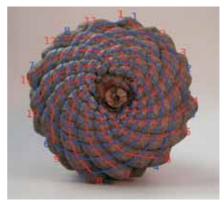


Figura 1.14: La pigna del pino d'Aleppo e la disposizione delle sue squame.

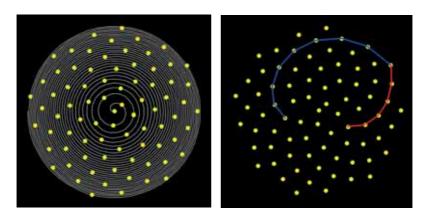


Figura 1.15: Simulazione della disposizione delle squame della pigna lungo una spirale (a sinistra) e le spirali secondarie (a destra).

Nome Scientifico	Pinus mugo Turra
Nome volgare	Pino mugo
Famiglia	Pinacee
Area distribuzione	Alpi, Dalmazia, Carpazi e Pirenei
Ambiente di crescita	Limite superiore del bosco
	su montagne calcaree
Altre caratteristiche	Si presenta sotto forma di cespuglio
	nelle Alpi centro-orientali, di albero
	in quelle occidentali
Spirali orarie	8
Spirali antiorarie	13





Figura 1.16: La pigna del pino Mugo e la disposizione delle sue squame.

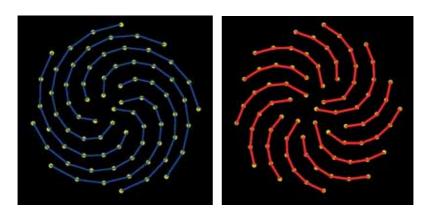


Figura 1.17: Simulazione della disposizione delle squame della pigna.

Scheda 3

Nome Scientifico	Cynara scolymus (L.) Hayek
Nome volgare	Carciofo
Famiglia	Asteracee
Area distribuzione	Mediterraneo
Altre caratteristiche	Coltivato
	Si consuma allo stadio di bocciolo
Spirali orarie	5
Spirali antiorarie	3





Figura 1.18: Il carciofo e la disposizione delle sue brattee.

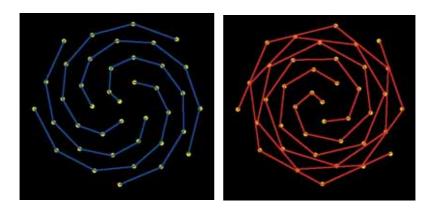


Figura 1.19: Simulazione delle brattee del carciofo.

Nome Scientifico	Pinus strobus L.
Nome volgare	pino strobo
Famiglia	Pinacee
Area distribuzione	Originario del Nord America.
	Diffuso anche nell'Europa centrale
Ambiente di crescita	Preferisce terreni freschi
Altre caratteristiche	Facilmente riconoscibile per
	le foglie ad ago morbide
Spirali orarie	8
Spirali antiorarie	5





Figura 1.20: La pigna del pino strobo.





Figura 1.21: Simulazione delle squame della pigna.

Nome Scientifico	Helianthus annuus L.
Nome volgare	Girasole
Famiglia	Asteracee
Area distribuzione	Originario del Sud America.
	Coltivato anche in Europa
Ambiente di crescita	Clima temperato
Altre caratteristiche	Dai semi commestibili si ricava
	un ottimo olio
Spirali orarie	34
Spirali antiorarie	55



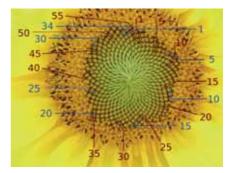


Figura 1.22: Il girasole e i suoi fiori tubulosi.

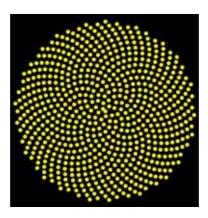


Figura 1.23: Simulazione dei fiori tubulosi del girasole.

Nome Scientifico	Anthemis tinctoria L.
Nome volgare	Camomilla per tintori
Famiglia	Asteracee
Area distribuzione	Mar Nero, Europa Centrale
Ambiente di crescita	Pendii aridi o coltivata
Altre caratteristiche	Dai fiori si estrae un colorante
	giallo inteso
Spirali orarie	21
Spirali antiorarie	34

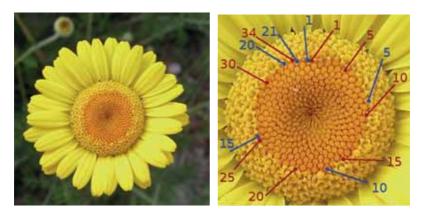


Figura 1.24: La camomilla per tintori e i suoi fiori tubulosi.

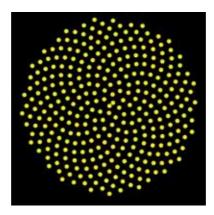


Figura 1.25: Simulazione dei fiori tubulosi della camomilla per tintori.

1.5 Appendice: il software

Le simulazioni qui presentate sono state ottenute con un programma appositamente costruito, disponibile sul sito:

http://www.dmi.units.it/~logar/mescef (alla voce: applet spirali). Forniamo qui alcune indicazioni sull'utilizzo di tale software. Consigliamo quindi di collegarsi con il sito sopra indicato per verificare le istruzioni che qui vengono riportate.

Il primo riquadro in alto a sinistra, denominato Tipo Spirale, permette di visionare differenti spirali: la spirale di Fermat, la spirale di Archimede, quella logaritmica e quella iperbolica. Inoltre, solo quando è selezionata la spirale logaritmica, si attiva un cursore che modifica un parametro della spirale (come abbiamo visto, l'equazione della spirale logaritmica è $r=ck^a$ e dipende da due parametri, c e k. Il parametro k è la base dell'esponenziale ed è questo il parametro che si può modificare con il cursore). Come abbiamo visto, il tipo di spirale che più interessa per capire la disposizione dei fiori, delle squame di una pigna o delle brattee di un carciofo, è quella di Fermat. Le altre spirali sono quindi state inserite principalmente per dare maggior versatilità al software.

La sezione Numero Spire contiene un cursore che permette di assegnare il numero di bracci (spire) alla spirale (da 1 a 500). (Nel caso della spirale logaritmica e iperbolica, può succedere spesso che aggiungere spire non modifichi in realtà il disegno, per il motivo che queste risultano troppo piccole e vicine al centro).

Il terzo riquadro (Tipo disegno), permette di selezionare 3 possibilità per il disegno: solo la spirale, solo i fiori disposti sulla spirale o sia la spirale, sia i fiori disposti sopra. Quando si seleziona il bottone fiori sul disegno compaiono alcuni pallini gialli che simulano i fiori (o le brattee) e sono stati disposti in modo che tra due consecutivi ci sia un angolo fissato (che, per impostazione predefinita, è 137° 30'). Se si seleziona il bottone spire+fiori, compare anche la spirale soggiacente. Per meglio capire come si dispongono i fiori in una margherita o in un girasole secondo il modello matematico precedentemente presentato, conviene procedere nel seguente modo:

- selezionare innanzitutto la spirale di Fermat;
- spostare il più possibile a sinistra il cursore del numero delle spire;
- selezionare il bottone spire+fiori;
- successivamente incrementare, un po' alla volta, il numero delle spire con l'apposito cursore osservando il modo in cui si modifica la disposizione dei pallini gialli.

Quando si seleziona il bottone fiori o il bottone spire+fiori si attivano il quarto e quinto riquadro, denominati, rispettivamente: Angolo tra due fiori consecutivi e Evidenzia spirali secondarie. Con i tasti presenti nel

primo di questi due riquadri, si può modificare l'angolo formato tra due fiori consecutivi e il centro della spirale. L'angolo può essere incrementato o decrementato o di 10° alla volta o di 1° o di 1'. L'angolo non può scendere al di sotto dei 7°; per impostazione predefinita il suo valore è di 137° 30'. A fianco dei tasti per l'incremento/decremento dell'angolo, una finestrella evidenzia il valore dell'angolo via via selezionato.

L'ultimo riquadro (Evidenzia spirali secondarie) permette di colorare (di rosso) un fiore ogni n, dove n è il numero selezionato nella finestrella di sinistra (il valore predefinito è 0 e in questo caso non colora di rosso alcun fiore). Se inoltre n è un numero di Fibonacci, questo viene messo in evidenza (dalla sigla fib). Infine il tasto succ. colora ancora di rosso un fiore ogni n, ma a partire dal fiore successivo a quello precedentemente utilizzato. Per comprendere l'utilizzo dei due tasti di questo riquadro, si proceda nel seguente modo:

- · si selezioni la spirale di Fermat;
- si porti il cursore del numero delle spire su un valore vicino a 200;
- nel riquadro Tipo disegno si selezioni il tasto fiori;
- si porti l'angolo tra due fiori consecutivi a 137° 30';
- nel riquadro Evidenzia spirali secondarie si scelga il numero di Fibonacci 34 o il numero di Fibonacci successivo (55) e si osservi la spirale secondaria che compare;
- si usi il tasto succ. per evidenziare altre spirali della stessa famiglia.

Naturalmente il software ha lo scopo di sperimentare le possibili varianti nella disposizione dei fiori e cercare di riprodurre/simulare esempi concreti, quindi è un invito a trovare altri fiori che presentano la caratteristica di disporsi lungo spirali e tentare di riprodurli nel modo più possibile aderente alla realtà.

CAPITOLO 2

Intermezzo matematico-artistico

2.1 Sezione aurea

Probabilmente tutti abbiamo sentito parlare della sezione aurea di un segmento. Una nozione che ha le sue radici nella Grecia classica. La definizione matematica è la seguente: partiamo da un segmento AB e fissiamo su di esso un punto C. Se succede che il segmento AC è medio proporzionale tra AB e AC, cioè se vale:

$$\overline{AB}: \overline{AC} = \overline{AC}: \overline{CB}, \tag{2.1}$$

allora il segmento AC costituisce la sezione aurea di AB.

La prima domanda, del tutto naturale, a cui possiamo dare una risposta dopo qualche calcolo, è la seguente: se AC è la sezione aurea di AB e se conosciamo la lunghezza del segmento AB, quanto deve essere lungo il segmento AC?

Per cercare la soluzione, si può procedere nel seguente modo: dalla proporzione (2.1) otteniamo la seguente relazione (usando il fatto che $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC}$):

$$\frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

Figura 2.1: La sezione aurea (segmento AC) di un segmento AB.

pertanto, spezzando la frazione a primo membro:

$$1 + \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

diamo ora un nome al rapporto $\overline{AC/BC}$, chiamiamolo per esempio ϕ , (pertanto $\overline{BC/AC}$ vale $1/\phi$) otteniamo quindi:

$$1 + \frac{1}{\phi} = \phi, \tag{2.2}$$

e quindi, moltiplicando ambo i membri dell'equazione per ϕ :

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \tag{2.3}$$

Si ottiene così un'equazione di secondo grado nell'incognita ϕ . Applicando la ben nota formula, troviamo le due soluzioni:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Naturalmente ϕ , che è un rapporto tra due segmenti, deve essere positivo e allora necessariamente abbiamo:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{2.4}$$

A questo punto abbiamo risolto il nostro problema iniziale: visto che ϕ è il rapporto tra le lunghezze di AB e AC, se è nota la lunghezza di AB per ottenere quella di AC basta semplicemente dividere la lunghezza di AB per il numero ϕ . In formula:

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{\phi} \tag{2.5}$$

Se calcoliamo il valore numerico di ϕ , otteniamo:

$$\phi = 1,618033988749894848204...$$

La costante ϕ è molto nota, così nota che ha un nome: si chiama *numero* aureo. Anzi, ha ben più di un nome, perché viene anche chiamata la sezione aurea o il rapporto aureo o la costante di Fidia o, ancora, la divina proporzione.

Abbiamo definito la sezione aurea di un segmento, ma si può anche definire in modo analogo la *sezione aurea di un angolo*.

¹ Talvolta con numero aureo, sezione aurea, ecc. si indica il numero $1/\phi$, altre volte invece $1/\phi$ viene chiamato la sezione argentea e indicato con la lettera greca Φ .

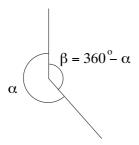


Figura 2.2: Angolo aureo (a)

Tracciamo un angolo α e l'angolo β , esplementare ad α (ossia tale che β = $360^{\circ} - \alpha$), come in figura 2.2. L'angolo α si chiama *angolo aureo* se è medio proporzionale tra l'angolo giro e l'angolo β . In formula:

$$360^{\circ}$$
: $\alpha = \alpha$: β

Se vogliamo calcolare il valore di α , notiamo che la proporzione ora scritta

è analoga alla (2.1) dove, al posto di \overline{AB} abbiamo scritto 360°, al posto di \overline{AC} abbiamo scritto α (e al posto di \overline{BC} , β). Usando quindi la formula (2.5), otteniamo: $\alpha = 360^{\circ}/\phi$. Una volta calcolato α , l'angolo β si ottiene per differenza. I valori sono:

$$\begin{cases} \alpha = 222^{\circ}29'32,0494..."\\ \beta = 137^{\circ}30'27,9506..." \end{cases}$$

Focalizziamo ora l'attenzione su β. E un angolo già incontrato? Non assomiglia forse all'angolo definito nel primo capitolo, al paragrafo 1.3, quando abbiamo parlato della disposizione dei fiori tubulosi della margherita o del girasole e utilizzato anche nella sezione 1.5?

Un'ultima definizione: un rettangolo in cui il lato minore sia la sezione aurea del lato maggiore, si chiama *rettangolo aureo*. Nella prossima sezione avremo modo di parlare a lungo di questi rettangoli.



Figura 2.3: La statua di Atena

Il numero aureo ha molte interessanti proprietà e sorprendentemente compare in campi della matematica molto differenti tra loro. Una prima curiosità di ϕ è la seguente: $1/\phi$ (il reciproco della sezione aurea), vale 0, 61803 ..., cioè ha la stessa parte decimale di ϕ , mentre ϕ^2 (il quadrato della sezione aurea) vale 2, 61803 ..., insomma anche in questo caso la parte decimale è sempre la stessa. La ragione di queste curiose proprietà in verità è presto detta:

dalla formula (2.2) abbiamo: $1/\phi = \phi - 1$, quindi $1/\phi = 1$, $61803 \dots - 1 = 0$, $61803 \dots$ Analogamente, dalla formula (2.3), abbiamo: $\phi^2 = \phi + 1 = 1$, $61803 \dots + 1 = 2$, $61803 \dots$ In seguito vedremo qualche altra particolarità del numero ϕ ; la domanda a cui



Figura 2.4: La facciata del Partenone ad Atene

però vorremmo dare una risposta è: da dove nasce la definizione di segmento aureo? Prima però di mostrare l'origine della proporzione (2.1) è opportuno un breve sconfinamento nel mondo dell'arte, perché la formula (2.1) ha influenzato la pittura, la scultura e l'architettura addirittura per millenni.

2.2 Un'incursione nell'arte

Gli antichi Greci, che, come abbiamo accennato, avevano definito la sezione aurea di un segmento, ritenevano che il rettangolo aureo, quel rettangolo in cui l'altezza è la sezione aurea della base, fosse molto gradevole a vedersi e, quando veniva riproposto nell'architettura, fornisse un'impressione di armonia e di bellezza impareggiabili. Pertanto, nelle loro costruzioni più importanti, adottarono frequentemente il rapporto aureo. Nel celebre Partenone, ad esempio, costruito sull'acropoli di Atene, pare che l'altezza della facciata corrisponda alla sezione aurea della sua larghezza, mentre in pianta la larghezza del tempio potrebbe essere stata costruita in modo da essere la sezione aurea della sua lunghezza. Anche i volti e i corpi umani appaiono particolarmente armoniosi se inscritti in rettangoli aurei: gli scultori greci, pertanto, probabilmente adottarono queste misure per ritrarre al meglio la bellezza e la grazia degli dei e degli eroi.

Nel Rinascimento italiano il rapporto ϕ venne considerato di somma importanza per la natura e l'arte e Luca Pacioli (ca 1445 Borgo S. Sepolcro -1517 Roma) compose addirittura un trattato sulla sezione aurea, da lui considerata come "Divina Proporzione". Illustratore di questo trattato fu Leonardo da Vinci (Vinci, Firenze 1452 -Amboise, Loira 1519); non è quindi strano che nelle sue opere egli abbia abbondantemente utilizzato questo rapporto, tra l'altro per il volto e la figura della celebre Gioconda. Tale rapporto di misure si trova in molti



Figura 2.5: Il palazzo dell'O.N.U. a New York

templi ed altri importanti edifici del passato ed anche dei nostri tempi, come ad esempio il palazzo dell'O.N.U., con sede a New York.

2.3 Un approfondiamento matematico

Nel primo capitolo abbiamo incontrato, parlando di margherite e girasoli, la successione di Fibonacci. In questo capitolo abbiamo fatto la conoscenza del numero aureo, dell'angolo aureo e abbiamo visto che l'angolo che appare nella disposizione dei fiori del girasole altro non è che l'angolo aureo (anzi, è l'esplementare dell'angolo aureo). Quindi sembra che i girasoli e le margherite riescano a legare tra loro la successione di Fibonacci con la sezione aurea. Vedremo nella prossima sotto-sezione che i girasoli e le margherite non hanno affatto torto: c'è in effetti un legame matematico molto profondo tra i numeri di Fibonacci e la costante ϕ . Per poterlo capire, però, avremo bisogno di sviluppare qualche conto. Successivamente cercheremo di mostrare da dove sia nata la nozione di sezione aurea. Anche qui dovremo addentrarci in qualche considerazione geometrica elementare ma che ad alcuni potrebbe risultare un po' tediosa. Concluderemo infine la sezione parlando del rettangolo aureo e della spirale aurea.

Pur cercando di mantenere la trattazione ad un livello elementare, sfioreremo argomenti che richiedono qualche conoscenza matematica. Il lettore non interessato può quindi evitare i tre paragrafi seguenti, senza con questo condizionare la comprensione delle rimanenti parti. È questo il significato dell'asterisco che precede le prossime sotto-sezioni.

2.3.1 *Legami tra ϕ e Fibonacci

Ricordiamo che la successione di Fibonacci è definita dalle seguenti regole:

$$\begin{array}{rcl} F_1 & = & 1 \\ F_2 & = & 1 \\ F_n & = & F_{n-2} + F_{n-1} \end{array}$$

Partendo da queste semplici istruzioni, è possibile trovare, come abbiamo fatto, un qualunque valore della successione. In particolare si vede che i primi elementi sono:

$$F_1 = 1$$
, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, ... (2.6)

È facile osservare che la successione è costituita da numeri interi che diventano sempre più grandi (come si dice in termini matematici, *tende ad infinito* o, anche, ha *per limite infinito*).

Per meglio capire alcune proprietà della successione di Fibonacci, consideriamo ora una nuova successione, definita dalle seguenti due condizioni:

$$a_1 = 1 a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$$
 (2.7)

La seconda delle due regole dice che per ottenere un qualunque valore della successione (dopo il primo) basta sommare il numero 1 al reciproco del valore precedente. Anche in questo caso non è complicato trovare i valori espliciti dei primi elementi di questa nuova successione, infatti a_2 sarà $1+1/a_1=1+1/1=2/1$, mentre $a_3=1+1/2=3/2$, eccetera. I primi numeri della successione sono quindi:

$$a_1 = 1$$
, $a_2 = \frac{2}{1}$, $a_3 = \frac{3}{2}$, $a_4 = \frac{5}{3}$, $a_5 = \frac{8}{5}$, $a_6 = \frac{13}{8}$, ...

Confrontando queste frazioni con la successione (2.6) scritta sopra, si intuisce una parentela molto stretta tra le due successioni. Come si vede, il numeratore e il denominatore di tutte le frazioni scritte sono numeri di Fibonacci. Vale quindi la relazione:

$$a_2 = \frac{F_3}{F_2}$$
, $a_3 = \frac{F_4}{F_3}$, $a_4 = \frac{F_5}{F_4}$, $a_5 = \frac{F_6}{F_5}$, $a_6 = \frac{F_7}{F_6}$

I conti che abbiamo fatto si fermano ad a_6 , ma probabilmente a chiunque verrebbe

da dire che in realtà la relazione trovata sarà sempre vera, quindi certamente anche a_7 varrà F_8/F_7 o, ad esempio, a_{46} dovrà valere F_{47}/F_{46} , ecc. Per lo meno, questa è l'impressione che certamente si ricava dopo aver svolto il calcolo dei primi valori di a_n . Dal punto di vista matematico, però, è necessario essere più precisi. A voler essere pignoli, infatti, noi abbiamo verificato la veridicità della formula che lega gli elementi della successione a_n con i numeri di Fibonacci solo per i primi valori di n. Perché mai la relazione dovrebbe essere sempre vera? Insomma quello che vorremmo è che, $per ogni numero naturale n \ge 2$ valga:

$$a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \tag{2.8}$$

Il problema è che i numeri naturali sono infiniti e noi, dicendo che vale (2.8), stiamo quindi facendo un'infinità di affermazioni delle quali abbiamo provato solo le prime cinque. . . Un po' pochine, si potrebbe obiettare. Per fortuna, però, si può stabilire matematicamente la validità della (2.8). Accenniamo quindi al ragionamento che si fa per portare a termine la dimostrazione. Basta provare che se la relazione tra gli a e gli F vale per un certo n, allora vale anche per l'n successivo (cioè per n+1). Siccome abbiamo visto che la relazione è vera per lo meno finché n = 6, dovrà essere vera per il successivo, cioè n = 7, ma se è vera per n = 7, dovrà esserlo anche per il successivo, cioè n = 8 e così via, allora adesso sì che potremo dire che è vera sempre, per tutti gli infiniti valori di n. Supponiamo quindi di prendere un *n* per cui sappiamo che vale: $a_n = F_{n+1}/F_n$, vediamo cosa possiamo dire per a_{n+1} . Per come è definita la successione (definizione (2.7)), abbiamo: $a_{n+1} = 1 + 1/a_n$, quindi $a_{n+1} = 1 + F_n/F_{n+1} = (F_n + F_{n+1})/F_{n+1}$. Ma, per come è definita la successione di Fibonacci, il numeratore dell'ultima frazione, cioè $F_n + F_{n+1}$, in realtà altro non è che F_{n+2} , quindi abbiamo infine provato che $a_{n+1} = F_{n+2}/F_{n+1}$, che è quanto volevamo vedere, perché questa è la formula (2.8) per n+1.

Il metodo di dimostrazione che abbiamo ora utilizzato può essere applicato in molte altre situazioni. Sinteticamente, si può così riassumere: se un'affermazione dipende da un numero naturale n, per provare che l'affermazione è vera per ogni valore di n, basta fare due passaggi: prima di tutto provare che è vera per il valore iniziale di n (nel nostro caso il valore iniziale di n è 2), in secondo luogo, provare che se si assume vera per un valore specifico di n, allora è vera anche per quello successivo. Questa tecnica dimostrativa si chiama dimostrazione per induzione ed è uno strumento fondamentale usato per provare moltissimi teoremi.

Ritornando alla successione $a_1, a_2,...$, vi è un modo molto "suggestivo" di riscriverla: come segue direttamente dalla definizione, a_2 vale $1+1/a_1$, allora a_2

vale 1+1/1, allora a_3 vale $1+1/a_2$, cioè:

$$a_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}$$

e così via (si procede quindi senza eseguire *alcuna semplificazione*). Si ottiene così che $a_1, a_2,...$ si può rappresentare nel seguente modo:

$$a_1 = 1$$
, $a_2 = 1 + \frac{1}{1}$, $a_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}$, $a_4 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}$, ...

Frazioni di questo tipo portano al concetto di *frazioni continue*. Non intendiamo qui approfondire ulteriormente l'argomento, che potrebbe portare lontano, però, visto che ormai avevamo tutti gli ingredienti per introdurlo, non abbiamo voluto perdere l'occasione . . . Aggiungiamo solo l'informazione che ogni numero reale si può sempre scrivere (in unico modo) nella forma di una frazione continua.

Abbiamo già osservato che gli elementi della successione di Fibonacci sono numeri interi che diventano sempre più grandi. Cosa si può dire della successione a_1, a_2, \dots ? Proviamo prima di tutto ad effettuare un esperimento matematico: calcoliamo alcuni dei suoi valori in formato decimale e vediamo che impressione ne ricaviamo. Fatti un po' di conti, otteniamo la tabella della figura 2.6. Osservando la tabella, si intuisce che gli a_n si avvicinano, quando n diventa sempre più grande, ad un valore la cui scrittura in forma decimale sembra essere 1,6180. . . e altre cifre decimali che, per ora, non conosciamo. In termini matematici, si direbbe che la successione è convergente (e ha per limite 1,6180...). Naturalmente il nostro esperimento non costituisce alcuna prova matematica: chi ci garantisce infatti che a_n si avvicina sempre più ad un numero, per tutti i valori di n? Per quel che ne sappiamo potrebbe succedere benissimo che questo andamento sia verificato fino ad a_{13} ma dopo non sia più vero. In fin dei conti ancora una volta, con il calcolo diretto, riusciamo a trovare il valore esplicito solamente per un numero finito di elementi della successione, e tutti gli altri (che sono infiniti) cosa fanno? Certo, possiamo calcolare anche a_{14} (otteniamo 1,618037...) ma restano sempre infiniti valori che non conosciamo. Il dubbio quindi è legittimo e una trattazione matematica rigorosa richiederebbe a questo punto una dimostrazione. Per non appesantire troppo queste considerazioni, accettiamo però il fatto che la successione ammetta effettivamente un limite e vediamo ora se, una volta ammessa

a_n	valore	val. decim.
a_3	3/2	1,5
a_4	5/3	1,666666
a_5	8/5	1,6
a_6	13/8	1,625
a_7	21/13	1,615384
a_8	34/21	1,619047
a_9	55/34	1,617647
a_{10}	89/55	1,618181
a_{11}	144/89	1,617977
a_{12}	233/144	1,618055
a_{13}	377/233	1,618025

Figura 2.6: I primi valori (esatti e approssimati) della successione an

la sua esistenza, riusciamo a trovarlo con precisione. Dall'esperimento, il limite sembra essere un numero che, scritto in forma decimale, inizia con 1,6180 e, guarda caso, assomiglia tanto al numero aureo, calcolato nella sezione 2.1. È un caso, o c'è una spiegazione? Indaghiamo più a fondo il problema. Chiamiamo ϕ questo limite sconosciuto (il nome non è proprio scelto a caso. . .). Dalla relazione (2.7) che abbiamo scritto sopra, cioè:

$$a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$$

deduciamo che se n diventa sempre più grande, sia a_n sia a_{n-1} (il valore immediatamente precedente ad a_n), dovranno avvicinarsi sempre di più al limite ϕ . In altre parole, da (2.7) comprendiamo che deve valere la relazione:

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

Ma questa è proprio la relazione (2.2) e quindi i conti continuano allo stesso modo visto nel paragrafo precedente, ottenendo che i possibili valori per la

² Se per caso qualcuno fosse proprio preso da una curiosità irrefrenabile, e volesse sapere come si arriva alla dimostrazione dell'esistenza del limite, diciamo solo che si utilizza opportunamente un teorema di analisi matematica: il teorema delle successioni monotòne.

nostra attuale ϕ sono due:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Solo il secondo numero può essere il limite a cui tende $a_1, a_2, ...$, perché la nostra successione è costituita tutta da numeri positivi, mentre la prima delle due soluzioni è negativa.³

In conclusione, abbiamo dedotto che la successione a_1 , a_2 ,... ha per limite il numero aureo e quindi abbiamo provato che il rapporto F_{n+1}/F_n tra due numeri di Fibonacci consecutivi tende al numero aureo. Insomma la successione di Fibonacci è strettamente imparentata con la sezione aurea.

La successione di Fibonacci è così imparentata con la costante ϕ , che per calcolare F_n , anziché procedere, come abbiamo finora fatto, eseguendo somme su somme, si può usare la seguente formula:

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

Questa formula porta il nome di *Formula di Binet*. Sorvoliamo qui sulla dimostrazione (che si può fare comunque con tecniche elementari).

2.3.2 *Il pentagono regolare

Partiamo ora da un pentagono regolare inscritto in una circonferenza (di raggio 1) e vogliamo risolvere il problema di trovare la lunghezza del suo lato e del suo apotema.

Dalla figura 2.7-a abbiamo che nel triangolo BOD l'angolo in O vale 72° , in quanto è la quinta parte dell'angolo giro. Allora l'angolo in A del triangolo ABD vale la metà, cioè 36° (in quanto questa è la relazione che intercorre tra un angolo al centro di una circonferenza e un angolo alla circonferenza che insistono sulla stessa corda). Per lo stesso motivo anche l'angolo BDE e l'angolo ADE valgono 36° (v. fig. 2.7-b). Il triangolo ABD è isoscele, quindi l'angolo ABD e l'angolo ADE sono uguali e ognuno di essi vale $(180^{\circ}-36^{\circ})/2$, cioè 72° . Sia C il punto d'incontro di AB e DE (v. fig. 2.7-b). I triangoli ABD e DBC sono simili perché hanno gli stessi angoli, quindi vale:

$$\overline{AB} : \overline{BD} = \overline{BD} : \overline{CB}$$

³ Questo fatto, anche se certamente intuitivo (se una successione è fatta tutta da numeri positivi ed ammette un limite, allora tale limite non può essere negativo) è in verità un altro teorema di analisi matematica, detto Teorema della Permanenza del Segno.

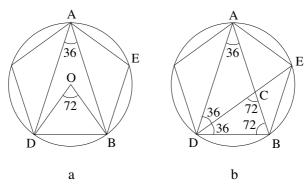


Figura 2.7: a) l'angolo in O è la quinta parte di un angolo giro, pertanto vale 72°, allora l'angolo in A vale la metà, quindi 36°. b) Guardando gli angoli dei triangoli ABD e DBC si vede che sono simili. Dalla loro similitudine nasce il rapporto aureo.

ma i triangoli \overline{DBC} e \overline{ACD} sono isosceli, pertanto $\overline{BD} = \overline{CD} = \overline{AC}$ e allora la proporzione scritta sopra diventa:

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{BC}$$

Questa è proprio la relazione (2.1) che definisce la sezione aurea.

Abbiamo allora trovato questa interessante proprietà del pentagono regolare, che può essere così riformulata (ricordando che il segmento \overline{AC} è uguale anche al lato del pentagono):

In un pentagono regolare il lato è la sezione aurea di una diagonale del pentagono stesso.

È proprio da questa proprietà del pentagono, scoperta dagli antichi Greci, che nasce la definizione di sezione aurea, che abbiamo introdotto in questo capitolo.

Grazie ai conti fatti, siamo a buon punto per calcolare l'apotema e il lato del pentagono.

Dalla figura 2.8, applicando due volte il teorema di Pitagora, abbiamo le seguenti relazioni:

$$\overline{AH}^2 = \overline{AB}^2 - \left(\frac{\overline{BD}}{2}\right)^2, \quad \overline{OH}^2 = \overline{OB}^2 - \left(\frac{\overline{BD}}{2}\right)^2$$

Per semplificare i conti, introduciamo qualche simbolo. Chiamiamo ℓ il lato del pentagono, quindi $\overline{BD} = \ell$, chiamiamo a l'apotema, quindi $\overline{OH} = a$ e, ricordando che $\overline{OB} = 1$, possiamo scrivere $\overline{AH} = 1 + a$. Dal fatto che, come abbiamo appena

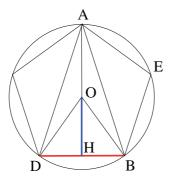


Figura 2.8: Lato (in rosso) e apotema (in blu) di un pentagono regolare

visto, il lato del pentagono è la sezione aurea della diagonale, abbiamo, per quanto visto nella formula (2.5) del paragrafo 2.1, $\ell = \overline{AB}/\phi$, ossia $\overline{AB} = \ell \phi$. Le due relazioni precedenti si possono quindi riscrivere:

$$(1+a)^2 = \ell^2 \phi^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2, \quad a^2 = 1 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

Dalla seconda equazione possiamo ricavare $(\ell/2)^2 = 1 - a^2$, quindi $\ell^2 = 4 - 4a^2$. Sostituiamo questo valore di ℓ^2 nella prima equazione e otteniamo l'equazione:

$$2a^2\phi^2 + a + 1 - 2\phi^2 = 0$$

che ha una sola soluzione positiva, data da

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2}\phi$$

e questo è il valore dell'apotema del pentagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio unitario, mente il lato si ricava da $(\ell/2)^2 = 1 - a^2$ e quindi, dopo un po' di manipolazioni algebriche:

$$\ell = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{3 - \phi}$$

2.3.3 *Dal rettangolo aureo alla spirale aurea

Abbiamo detto che un rettangolo aureo è un rettangolo in cui il lato minore è la sezione aurea del lato maggiore. Un'approssimazione del rettangolo aureo si può ottenere giustapponendo in modo opportuno quadrati che hanno per lato

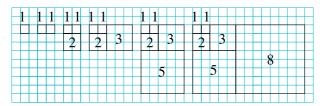


Figura 2.9: Varie approssimazioni di un rettangolo aureo con l'utilizzo dei numeri di Fibonacci: si parte da un quadrato di lato 1, ad esso si aggiunge a destra un altro quadrato di lato 1, al rettangolo risultante si aggiunge in basso un quadrato di lato 2, al rettangolo risultante si aggiunge a destra un quadrato di lato 3, e così via. I rettangoli così costruiti sono approssimazioni, via via migliori, di rettangoli aurei.

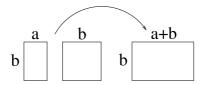


Figura 2.10: Se partiamo da un rettangolo aureo e facciamo combaciare al suo lato maggiore (di lunghezza b) un quadrato di lato b, otteniamo un nuovo rettangolo aureo.

i numeri di Fibonacci, come nella figura 2.9. Per comprendere questo fatto, basta osservare che, per come sono costruiti i rettangoli nella figura 2.9, le misure del lato maggiore e del lato minore in ciascun rettangolo sono date da un numero di Fibonacci e dal suo precedente; il loro rapporto è quindi del tipo F_n/F_{n-1} e abbiamo già visto che questo rapporto ha per limite proprio ϕ .

Infine vediamo una proprietà dei rettangoli aurei, che porta ad una costruzione non molto diversa di quella vista nella figura 2.9: partiamo questa volta da un rettangolo aureo, costruiamo il quadrato che ha per lato il lato maggiore del rettangolo e facciamo combaciare le due figure lungo tale lato, come in figura 2.10. Otteniamo nuovamente un rettangolo aureo. Il perchè è presto detto: se nel rettangolo di partenza il rapporto b/a tra il lato maggiore e il lato minore vale ϕ , allora nel nuovo rettangolo il rapporto vale (a + b)/b = a/b + 1. Cioè vale $1/\phi + 1$ che è proprio ϕ , in quanto già sappiamo che ϕ soddisfa all'equazione $\phi = 1+1/\phi$. Questo processo può essere iterato, con un procedimento simile a quello visto nella figura 2.9, per ottenere una sequenza di rettangoli aurei in cui ogni nuovo rettangolo contiene il precedente e ha per lato minore il lato maggiore del prece-

dente. Si può però effettuare una piccola variante nella costruzione, come indicato nella figura 2.11. In questo caso si parte dal rettangolo aureo ABCD, ad esso si "aggiunge" a *sinistra* il quadrato di lato AB, ottenendo così il rettangolo aureo di lati CD e DE, a questo rettangolo si "aggiunge" in *basso* il quadrato di lato DE ottenendo il rettangolo aureo di lati DE ed EF, poi a questo si aggiunge *a destra* il quadrato di lato EF, il nuovo quadrato si aggiunge in *alto*, poi di nuovo a si-

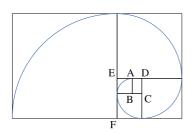


Figura 2.11: Una costruzione per approssimare la spirale aurea.

nistra, in basso, a destra ecc. ecc. La disposizione di questi rettangoli aurei permette di disegnare una sorta di spirale ottenuta dalla giustapposizione di opportuni archi di circonferenze. Il primo arco è ottenuto puntando il compasso in *B* con apertura *AB* e tracciando un quarto di circonferenza, poi si punta il compasso in *C* e con apertura *DE* si traccia un altro quarto di circonferenza e così via. La curva che si ottiene approssima con notevole precisione la spi-

rale aurea, che è una particolare spirale logaritmica e più precisamente è quella di equazione $\mathbf{r} = \mathbf{c} \boldsymbol{\phi}^{\alpha}$, nella quale alla costante k dell'equazione generale di pagina 14 viene assegnato proprio il numero aureo.

CAPITOLO 3

Cavolfiori e Frattali

3.1 Una passeggiata infinita

Fin dalla scuola elementare siamo stati abituati ad osservare o disegnare figure geometriche che corrispondevano a segmenti, a quadrati, a rettangoli o a cerchi. Ma è possibile rintracciare in natura tali figure, che non siano state espressamente costruite dall'uomo? Pensiamo di osservare, ad esempio, il profilo di una catena montuosa, oppure il bordo di un masso, o anche una linea naturale di costa. . . Corrispondono esse alle figure che abbiamo esaminato nello studio della geometria? Una domanda apparentemente banale, ma che ci conduce a profonde considerazioni, potrebbe essere ad esempio la seguente: quanto è lunga una linea di costa? La risposta non è ovvia. Per intuire il problema, consideriamo un tratto di costa come nella figura 3.1.

La fotografia (tratta da Google maps) è relativa ad un breve tratto di costa orientale istriana. Fissiamo due punti A e B e cerchiamo di capire quanto sono distanti tra loro. In linea d'aria i due punti distano circa 195 metri. Se invece misuriamo le distanze ogni 100 metri, inserendo un punto (rosso) sulla costa, vediamo che la spezzata che approssima la costa è lunga 200 metri. Se misuriamo la distanza ogni 50 metri, vediamo che la nuova spezzata è costituita da 4 segmenti di 50 metri e un ultimo segmento di circa 10 metri, quindi la spezzata è ora lunga 210 metri. Se infine misuriamo le distanze ogni 10 metri, vediamo che la spezzata è ora costituita da 28 segmenti e quindi se percorriamo la costa da A a B lungo quest'ultimo cammino, dobbiamo percorrere 280 metri. Risulta quindi evidente che tanto più ravvicinati saranno i punti a distanza fissa presi sulla costa, tanto maggiore risulterà la lunghezza della spezzata. Se i punti fossero presi a di-

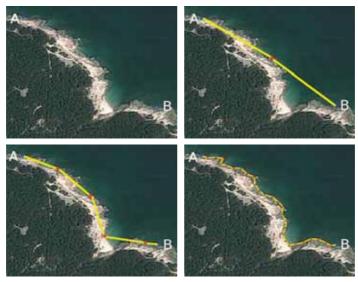


Figura 3.1: Tratto di costa istriana. I punti A e B distano, in linea d'aria, 195 metri. La distanza può variare, anche di molto, se per andare da A a B seguiamo spezzate differenti.

stanza microscopica . . . avremmo una costa che potrebbe misurare lunghezze enormi, che tendono addirittura ad un valore infinito. Attenti allora a quando andate a fare una passeggiata su un lungomare: potreste incappare in un percorso che non ha più fine!

Queste considerazioni ci portano a pensare che una linea di costa, così come il profilo di una montagna o il contorno di un sasso o di una nuvola non sono figure geometriche della stessa natura di quelle che usualmente si considerano in geometria e vanno quindi studiate con nuovi strumenti.

3.2 Osservando un cavolo . . . ed altre piante

Una delle forme geometriche più interessanti che si può osservare nei vegetali è quella di un cavolfiore o, meglio ancora, quella di un cavolo romano (figura 3.2).

Se si stacca un ramo dall'infiorescenza del cavolo,¹ si nota che la forma di quest'ultima è del tutto simile all'infiorescenza intera, salvo che è più piccola. A sua volta, se dal ramo si stacca un ulteriore rametto, si isola una parte di cavolfiore che è ancora simile all'infiorescenza intera e al ramo precedente. Con un po' di

¹ Nei cavoli coltivati si ha ingrossamento del fusto e infiorescenza abbreviata con fiori rudimentali.





Figura 3.2: La sezione di un cavolfiore (a sinistra) e un cavolo romano (a destra)

attenzione, si riesce ancora a staccare una parte dall'ultimo rametto ottenuto e si isola così nuovamente un pezzetto del tutto simile al cavolfiore intero e ai rami via via staccati. In altre parole, nel cavolo si possono riconoscere almeno quattro livelli diversi che ripropongono sempre le stessa struttura (forma) di base. Come vedremo, questa caratteristica si ritrova in molte piante ed è alla base del concetto matematico di *frattale*.

La definizione di frattale non è facile e, anzi, non ne esiste ancora una universalmente riconosciuta. Una caratteristica però peculiare della maggior parte delle figure geometriche che si vogliono includere nella categoria dei frattali, è l'autosimilarità, la proprietà cioè appena vista nell'esempio del cavolfiore: una parte della figura è geometricamente simile all'intera figura, anche se in scala ridotta. Figure geometriche con questa caratteristica erano note ai matematici fin dal XIX secolo. Una di queste è l'insieme di Cantor (introdotto dal matematico tedesco Georg Cantor nel 1883). L'insieme di Cantor ha caratteristiche matematiche sorprendenti ma forse un po' troppo specifiche per essere qui introdotte (chi è interessato alla definizione e ad alcune proprietà, può ad esempio consultare Wikipedia, alla voce "Cantor set"). Un'altra figura geometrica con la caratteristica dell'autosimilarità, molto nota, è la curva di Koch (figura 3.3), definita dal matematico svedese Helge von Koch nel 1904. La ragione matematica per cui Koch introdusse la curva era quella di fornire un esempio di una curva continua ma non derivabile in alcun suo punto. Naturalmente non approfondiamo qui né il concetto di curva continua né quello di curva derivabile, diciamo solo che la nozione di continuità è legata all'integrità di una curva: qualche volta si dice, in maniera forse poco rigorosa, ma senz'altro visivamente efficace, che una curva è continua se si riesce a disegnarla senza mai staccare la penna dal foglio; mentre una curva è derivabile in un punto se in quel punto si riesce a tracciare la retta tangente. La curva di Koch è effettivamente continua ma è così "spigolosa" che non si può tracciare la retta tangente in nessuno dei suoi punti.



Figura 3.3: La curva di Koch (a sinistra). Può essere decomposta in 4 curve di Koch (a destra).

La proprietà di autosimilarità della curva di Koch è molto evidente: la curva è composta dall'unione di 4 parti, ognuna delle quali è ridotta in scala ad 1/3 (due di esse inoltre sono ruotate), come evidenziato nella seconda parte della figura 3.3. Ognuna di queste 4 parti è poi costituita da altre 4 parti le quali a loro volta sono costituite da 4 parti e così via all'infinito. . . In conseguenza di ciò abbiamo ad esempio la proprietà che se prendiamo due punti qualunque distinti della curva, tra essi si trova sempre una copia (opportunamente riscalata) della curva stessa. Per quanto riguarda la costruzione della curva di Koch, rimandiamo al paragrafo 3.3.

Si noti poi la somiglianza della curva di Koch con il profilo di una costa o con il contorno di un cavolfiore, constatazione che fa sospettare che i frattali siano più adatti ad imitare le forme della natura di quanto non lo siano le figure della geometria "classica".

Ora che abbiamo messo in evidenza alcune caratteristiche peculiari di un frattale, passiamo a spiegare un modo operativo per costruire un'ampia classe di frattali che utilizzeremo poi per comprendere meglio la natura geometrica della forma di molte piante ed anche di altri esseri viventi.

I frattali (nel piano) su cui vogliamo focalizzare la nostra attenzione si possono costruire per mezzo delle seguenti 4 regole:

Regole per la costruzione di un frattale

- 1. Si parte da una figura piana di base. Ad esempio, consideriamo tre segmenti, come in figura 3.4–a;
- 2. si scelgono alcuni punti nel piano (nell'esempio, sono i punti rappresentati da tre quadratini di figura 3.4–b);
- 3. in ognuno di essi si riporta il disegno di base, opportunamente riscalato e ruotato (figura 3.4–c)
- 4. si ripete nuovamente il procedimento per ciascuna delle parti del disegno aggiunte. Nel nostro esempio quindi, partendo dal disegno di figura 3.4– c il disegno di base viene riportato 9 volte: 3 sul ramo di sinistra, 3 sul ramo centrale e 3 sul ramo di destra (figura 3.4–d).

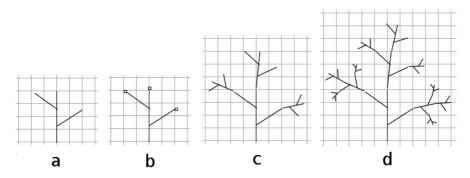


Figura 3.4: Primi passi per la costruzione di un frattale.

Se il punto 4 viene ripetuto ancora una volta, si ottiene il primo disegno di figura 3.5. Ripetendo ancora "infinite" volte il procedimento, si ottiene infine il frattale che è quanto mostrato nel secondo disegno di figura 3.5.

Per la precisione, in questo esempio, per ottenere la figura 3.4–c, la figura di base viene ripetuta, come detto, tre volte: la prima volta viene ruotata di 64 gradi in senso antiorario rispetto alla figura di base e scalata del fattore 0.4 (ottenendo il "ramo" di sinistra), la seconda volta viene ruotata di 5 gradi in senso orario e scalata del fattore 0.7 (ottenendo il "ramo" alto) e la terza volta viene ruotata di 74 gradi in senso orario e riscalata di 0.37. Questi dati (assieme alle coordiante dei tre punti evidenziati nella figura 3.4-b), sono sufficienti per sapere come completare la costruzione del frattale. Ad esempio, possiamo capire come viene costruito il ramo di sinistra della figura 3.4-d: si parte dal ramo di sinistra della figura 3.4–c e si aggiunge tre volte la figura di base (a), la prima volta viene ruotata di 128 (= 64 + 64) gradi in senso antiorario e riscalata del fattore 0.16 = 0.4× 0.4, la seconda volta viene ruotata di 59 gradi in senso antiorario (cioè 64 gradi in senso antiorario e 5 gradi in senso orario) e riscalata del fattore $0.28 = 0.4 \times 10^{-2}$ 0.7, la terza volta viene ruotata di 10 gradi in senso orario (cioè 74 gradi in senso orario e 64 gradi in senso antiorario) e riscalata di 0.148 (=0.4 × 0.37). Analoghe computazioni per gli altri rami.

3.3 Un po' di conti

Prima di vedere come applicare le 4 regole del paragrafo precedente per simulare l'aspetto di alcuni vegetali, ci soffermiamo ancora qualche istante sulle proprietà della curva di Koch (figura 3.3) e in particolare cerchiamo di calcolare la sua lunghezza. Per far ciò, entriamo un po' più nei dettagli della sua costruzione. Partiamo da un segmento, diciamo di lunghezza unitaria, e dividiamolo in

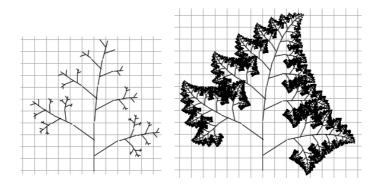


Figura 3.5: L'aspetto intermedio e finale del frattale

tre parti uguali, come nel primo disegno della figura 3.6, quindi ciascuna parte sarà lunga 1/3, costruiamo il punto E in modo che $\overline{CD} = \overline{CE} = \overline{ED}$ (quindi in modo che il triangolo CDE sia equilatero). La lunghezza della spezzata ACEDB è dunque $4 \times 1/3 = 4/3$. Nella fase successiva, sottoponiamo ognuno dei 4 segmenti AC, CE, ED e DB del secondo disegno della figura 3.6 alla stessa procedura, quindi dividiamo ciascuno di essi in 3 parti uguali e sostituiamo il segmento centrale con i due lati del triangolo equilatero che ha per base proprio il segmento centrale. Veniamo così a disegnare una spezzata che è costituita da $4 \times 4 = 4^2$ segmenti ciascuno di lughezza 1/3 della lunghezza dei segmenti della spezzata precedente (quindi lungo $1/3 \times 1/3 = 1/3^2$). La situazione può quindi essere riassunta dalla seguente tabella, dove la quarta riga si riferisce all'ultimo disegno della figura 3.6, che è una spezzata costituita da $4 \times 4 \times 4 = 4^3$ segmenti di lunghezza 1/3.

numero segmenti	lunghezza ogni segmento	lunghezza totale
1	1	1
4	1/3	4/3
4^{2}	$\frac{1/3^2}{1/3^3}$	$(4/3)^2$
4^3	$1/3^3$	$\left(4/3\right)^3$

Naturalmente il procedimento può essere ripetuto n volte, ottenendo quindi una spezzata di 4^n segmenti, ciascuno di lunghezza $1/3^n$, cioè all'n-imo passo si ottiene una curva di lunghezza $(4/3)^n$.

Poiché 4/3 è maggiore di 1, al crescere di n, la frazione $(4/3)^n$ diventa arbitrariamente grande (ad esempio $(4/3)^{10} = 18$, $(4/3)^{15} = 75$, $(4/3)^{20} = 315$, ...), si in-

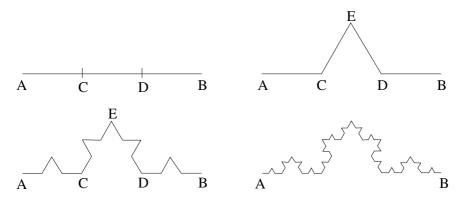


Figura 3.6: Costruzione della curva di Koch

tuisce quindi che la lunghezza della curva limite che si ottiene è infinita. Si osservi che abbiamo provato un fatto che a prima vista può sembrare paradossale: una regione limitata del piano può contenere una curva di lunghezza infinita!

Di più, visto che, come abbiamo già osservato, tra due punti qualunque di una curva di Koch si trova ancora una curva di Koch opportunamente riscalata e visto che se una curva è di lunghezza infinita, anche se viene riscalata rimane di lunghezza infinita, otteniamo l'ulteriore, curiosa proprietà, che presi due qualunque punti A e B della curva, la lunghezza della porzione della curva compresa tra A e B è ancora infinita. Insomma, se incominciassimo una camminata lungo la curva di Koch, non solo non arriveremmo mai alla fine del percorso in un tempo finito, ma sembra quasi che non riusciremmo nemmeno a raggiungere un altro punto diverso dal punto di partenza.

La nozione di lunghezza non sembra quindi essere quella giusta per "misurare" un frattale. I matematici hanno allora introdotto altri numeri che si possono associare a queste figure geometriche. Uno di questi è la *dimensione* (detta anche *dimensione di Hausdorff*). Un'idea intuitiva di cosa possa essere la dimensione per le figure geometriche più semplici è probabilmente nota a tutti: se siamo vincolati a camminare lungo un percorso rettilineo o circolare abbiamo un solo grado di libertà, quindi la retta (o un segmento) o la circonferenza si dice che hanno dimensione uno; se invece camminiamo su una superficie piana o anche ad esempio sferica, (come potremmo dire che è la superficie terrestre), abbiamo due gradi di libertà, quindi il piano o la superficie sferica (o una loro porzione) hanno dimensione 2. Lo spazio poi ha dimensione 3. Si è visto che si può generalizzare la nozione di dimensione, in modo da associarla anche ai frattali, ma le dimensioni dei frattali risultano essere numeri non interi. Ad esempio la dimen-

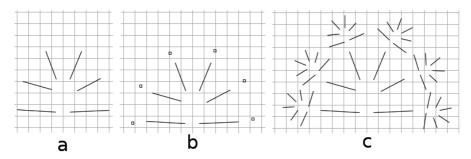


Figura 3.7: Le prime fasi per la costruzione di frattale che simula un cavolfiore

sione della curva di Koch è circa 1, 262: un po' più di una usuale curva, un po' meno di una superficie.

3.4 Simulazioni

Vediamo ora come le 4 regole della sezione 3.2 che abbiamo esposto per ottenere un frattale, possano essere usate per simulare l'aspetto di alcune piante. Partiamo dall'esempio del cavolfiore (figura 3.2). Prima di tutto bisogna individuare una figura di base. Osservando la figura 3.2 notiamo che è costituita da un

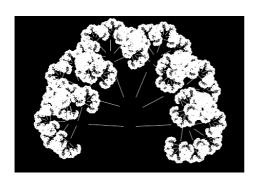


Figura 3.8: Simulazione di un cavolfiore con un frattale

tronco da cui si dipartono 6 diramazioni e su ciascuna di queste diramazioni si sviluppa poi il resto dell'infiorescenza. È quindi ragionevole individuare come base da cui iniziare, lo schema disegnato nella figura 3.7–a. Il secondo passo consiste nel selezionare i punti da cui far partire le diramazioni (figura 3.7–b). Al passo 3 riportiamo la figura di base nei sei punti appena selezionati, opportunamente riscalata e ruotata (figura 3.7– c). Se ripetiamo il procedimento, otteniamo alla fine la figura 3.8.

Come si vede da un confronto tra la figura 3.2 e la figura 3.8, la somiglianza che si ottiene con questa simulazione è notevole. La costruzione che abbiamo qui

presentato è stata ottenuta con un software di pubblico dominio il cui utilizzo sarà spiegato più nei dettagli nell'appendice di questo capitolo.

Qui di seguito vedremo alcuni esempi di piante che hanno una struttura che può essere simulata con un frattale. Ovviamente la natura è sempre più complessa o fantasiosa di una pura regola matematica, quindi è chiaro che il risultato delle simulazioni non sarà sempre del tutto aderente alla realtà. Lo scopo degli esempi che seguono non è quindi tanto quello di riprodurre un vegetale nel modo più fedele possibile, quanto piuttosto di evidenziare alcuni meccanismi di autosimilarità che sono presenti in molte piante. Se le felci e le ombrellifere sono tra le piante che meglio si possono imitare con i frattali, si riesce ad ottenere una simulazione di molte altre piante partendo da una configurazione di base e ripetendola solo per un numero limitato di volte (è questo il caso delle diramazioni di un orniello o di una quercia).

Anche per la costruzione degli esempi qui riportati ci si è avvalsi del software presentato nell'appendice al presente capitolo. Per ognuno degli esempi qui trattati viene fornita una breve descrizione delle principali caratteristiche botaniche e sono date alcune indicazioni sulla costruzione della simulazione.

² Famiglia di piante così denominate hanno generalmente i fiori disposti in una infiorescenza ad ombrella.

Fronde di felce

Le felci non sviluppano fiori, ma si riproducono per mezzo di spore, cellule in grado di generare un nuovo organismo senza l'intervento di meccanismi sessuali. Le spore sono contenute negli sporangi disposti generalmente sulla pagina inferiore della fronda. Le foglie sono spesso suddivise, fino a 3 o 4 livelli. In Italia sono presenti oltre 60 specie di felci. Alcune specie vengono coltivate come piante ornamentali.

In questo esempio e nei due esempi successivi vediamo tre felci e la loro simulazione con un frattale.

ESEMPIO 1





Figura 3.9: Fronda di felce e sua simulazione.

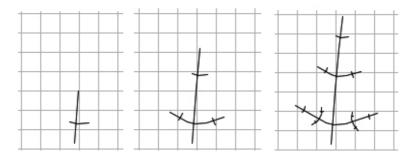


Figura 3.10: Costruzione della simulazione.

La simulazione è ottenuta aggiungendo alla figura di base (primo disegno della figura 3.10) tre copie della stessa, ruotate e riscalate opportunamente. Per ottenere la simulazione finale, il numero di iterazioni è ripetuto il maggior numero possibile di volte (il software utilizzato prevede in questo caso 10 iterazioni); in

questo caso, per rendere il risultato più realistico, il frattale finale è stato anche riscalato lungo l'asse verticale (del rapporto 3/4).

Nei due esempi seguenti, la simulazione viene ottenuta aggiungendo nuovamente tre copie alla figura di base. Le differenze tra le varie simulazioni si ottengono modificando opportunamente il punto di applicazione delle tre copie.

ESEMPIO 2





Figura 3.11: Fronda di felce e sua simulazione.

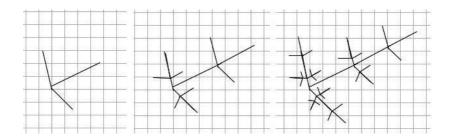


Figura 3.12: Costruzione della simulazione.

ESEMPIO 3



Figura 3.13: Fronda di felce e sua simulazione.

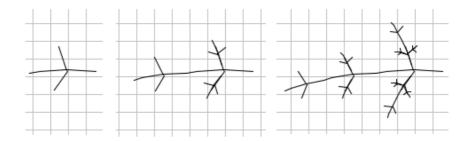


Figura 3.14: Costruzione della simulazione.

Foglie di ombrellifera

Il prossimo esempio si riferisce ad una ombrellifera. Il nome di questa famiglia deriva dal particolare tipo di infiorescenza, costituita da una ombrella semplice o composta³, che può simulare un grande fiore. In molti casi il lembo fogliare delle foglie basali è profondamente suddiviso, fino a 2–3 livelli diversi. Piante erbacee, frequenti nelle zone temperate, contano in Italia oltre 200 specie, utilizzate anche come piante aromatiche (anice, cumino), alimentari (carota, finocchio, prezzemolo, sedano). Qualche specie risulta tossica (cicuta).





Figura 3.15: Foglia di ombrellifera e sua simulazione.

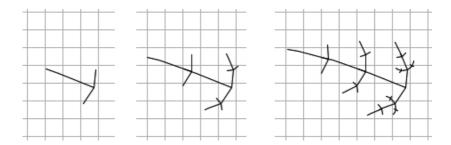


Figura 3.16: Costruzione della simulazione.

Ancora una volta il frattale è costruito partendo da una figura di base costituita da tre segmenti. In questo caso le tre copie della figura di base vengono inserite esattamente nei tre estremi dei segmenti che costituiscono la figura iniziale. Il frattale viene infine riscalato lungo l'asse orizzontale del rapporto di 4/5.

³ L'ombrella è un particolare tipo di infiorescenza, coi gambi dei fiori che partono dallo stesso punto dell'asse fiorale. Se le ombrelle si uniscono tra di loro nello stesso modo ad un livello superiore, si ha un'ombrella composta.

Lichene frondoso

I licheni sono consociazioni stabili (simbiosi) di alghe e funghi, in grado di vivere anche in ambienti molto severi, come le superfici delle rocce, ed anche con climi molto freddi. I licheni frondosi si aggrappano sulle cortecce di alberi e cespugli, e vengono consumati da molti animali erbivori. Molti licheni sono caratterizzati da una crescita secondo il modello dicotomico⁴.



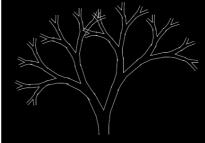


Figura 3.17: Lichene frondoso e simulazione di una sua diramazione.

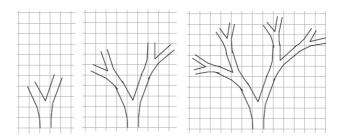


Figura 3.18: Costruzione della simulazione.

La simulazione viene costruita aggiungendo alla figura di base due sue copie riscalate e ruotate. Il numero di iterazioni utilizzato per cercare di simulare una diramazione del lichene è stato limitato a 4.

⁴ Ramificazione in cui l'apice del vegetale si divide in due, formando due rami uguali

Ramificazione di un'Alga bruna

Molte alghe brune si sviluppano con biforcazioni all'estremità, producendo per dicotomia⁵ rami di forma simile. Vivono nei mari con pronunciate oscillazioni di marea (ad es. mare del Nord, o anche Alto Adriatico) o con forme galleggianti lunghe anche un centinaio di metri (ad es. Mar dei Sargassi, nell'Oceano Atlantico). Da esse si può estrarre soda, potassa, iodio e acido alginico, quest'ultimo utilizzato per fabbricare carta, fibre artificiali, colori, o additivi alimentari, usati ad esempio nei gelati.





Figura 3.19: Alga bruna.

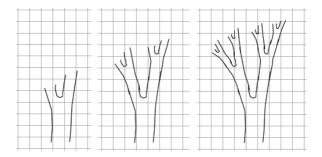


Figura 3.20: Costruzione della simulazione.

Come nel caso del lichene frondoso (esempio precedente) anche ora la simulazione è ottenuta con due diramazioni. Il disegno finale si ottiene iterando il processo per 5 volte.

⁵ Vedi nota n. 4, pag. 56

Ramificazione dell'Orniello

L'Orniello è un alberello nel quale alle estremità dei rami si può riconoscere una ramificazione caratteristica. Il suo areale⁶ comprende i territori a nord del Mediterraneo e del mar Nero. In Italia è abbondantissimo nelle zone di rimboschimento spontaneo di pascoli e prati, e nelle boscaglie soprattutto nella fascia collinare e basso montana. In Sicilia si incide la sua corteccia per estrarre la manna, un blando lassativo.

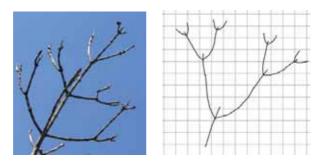


Figura 3.21: Rami di orniello.

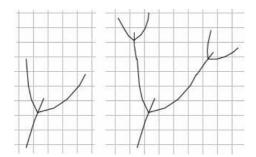


Figura 3.22: Costruzione della simulazione.

Le ramificazioni sono ottenute a partire dalla figura di base aggiungendo ad essa due copie ruotate e riscalate. Il processo è ripetuto per 3 volte soltanto.

⁶ L'areale di una specie è il territorio in cui essa dimora.

Ramificazione di una Quercia

Le Querce sono tra gli alberi più importanti in Italia, dalla fascia costiera alla zona collinare. Si suddividono in numerose specie, sempreverdi o con foglie che seccano in autunno. Queste ultime hanno le foglie con il margine sinuoso suddiviso in lobi. Tutte le querce producono come frutto la ghianda, alimento importante per molti animali dei boschi. La parte superiore della ghianda è avvolta da squame che formano una piccola cupola: esse hanno una caratteristica disposizione a spirale.



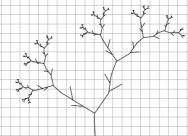


Figura 3.23: Rami di quercia.

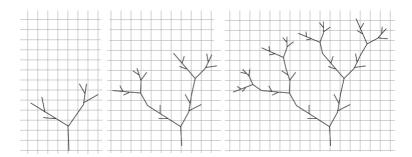


Figura 3.24: Costruzione della simulazione.

In questo caso la figura di base utilizzata per ottenere la simulazione è leggermente più complessa rispetto agli esempi precedenti. Vengono costruite due sue copie e inserite dopo opportuna rotazione e riscalatura. Per ottenere la simulazione finale, il processo viene iterato 4 volte.

Pino d'Aleppo

Le squame legnose delle pigne del Pino d'Aleppo (come d'altronde quelle di ogni pino) hanno una caratteristica disposizione a spirale. Quest'albero è ben adattato ai climi aridi e ai cieli luminosi del Mediterraneo. Vive sulle coste del Mediterraneo orientale e del mar Nero. In Italia è spontaneo solo sulle coste che si affacciano sul mare Adriatico e Ionio. Viene spesso utilizzato per rimboschimenti.



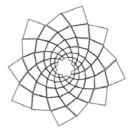


Figura 3.25: Pigna del pino d'Aleppo.



Figura 3.26: Costruzione della simulazione.

La pigna del pino d'Aleppo era già stata considerata nel primo capitolo (si veda la scheda 1 a pagina 21). In quella simulazione, la disposizione delle squame era stata ottenuta con il modello matematico introdotto nella sezione 1.3 del primo capitolo. Qui si presenta una simulazione leggermente diversa ma il cui risultato finale è probabilmente ancora più verosimile. Si parte da una figura di base costituita da un quadrilatero. Nella fase successiva il quadrilatero viene ruotato di 137° 30' (in senso antiorario) e opportunamente riscalato (di un fattore di scala di poco inferiore ad 1). Il processo si itera, quindi al secondo livello si ottiene il quadrilatero di base a cui è aggiunto un quadrilatero ruotato di 137° 30' a cui è aggiunto un ulteriore quadrilatero riscalato e ruotato di altri 137° 30' e così via. Ripetendo il processo un numero adeguato di volte (all'incirca un centinaio), si ottiene la simulazione della figura 3.25. La difficoltà principale della simulazione qui presentata risiede nello scegliere in modo corretto il quadrilatero da cui partire e il fattore di scala.

Esemplare di Abete Rosso

L'Abete rosso è una delle più importanti essenze arboree delle zone continentali fredde (Europa centrale o settentrionale) o della fascia montana. Sulle Alpi forma boschi compatti naturali soprattutto nella fascia compresa tra 1000 e 1900 metri. Ha corteccia bruno–rossiccia e pigne pendenti dai rami. E stato molto usato dai forestali (anche troppo!) per rimboschire zone montane, perché è un buon produttore di legname, in quanto caratterizzato da una crescita rapida.





Figura 3.27: Abete rosso.

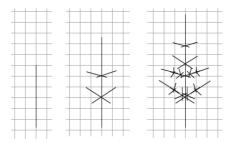


Figura 3.28: Costruzione della simulazione.

In questa simulazione la figura di base è ridotta ad un unico segmento che viene però riscalato e ruotato quattro volte, ottenendo così il disegno intermedio della figura 3.28. Il processo viene quindi iterato quante più volte possibili, ottenendo una figura il cui contorno risulta abbastanza somigliante all'abete rosso.

Infiorescenza di una Ombrellifera

Nella famiglia delle Ombrellifere i fiori si distribuiscono in caratteristici raggruppamenti (infiorescenze) denominate ombrelle⁷. Nell'immagine sono rappresentate ombrelle composte, costituite da piccoli fiori bianchi. Le ombrellifere sono abbondanti nelle zone temperate. Molte vengono utilizzate come piante aromatiche (anice, cumino), o commestibili (carota, finocchio, prezzemolo, sedano); alcune, come la cicuta, sono velenose (v. anche l'esempio 4).





Figura 3.29: Inflorescenza di un'ombrellifera.

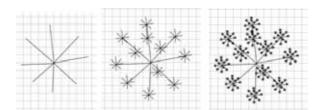


Figura 3.30: Costruzione della simulazione.

La figura di base per costruire la simulazione è costituita da 8 segmenti passanti tutti per uno stesso punto. Gli otto segmenti vengono poi riscalati e inseriti in 12 punti del piano. Iterando il procedimento, si ottiene una simulazione molto soddisfacente dell'infiorescenza dell'ombrellifera.

⁷ Vedi nota n. 3, pag. 55

Platano comune

I Platani sono alberi con foglie grandi, palmate, a 5 o 7 lobi acuti, l'insieme dei frutti assume forma complessivamente sferica, con diametro di circa 3 cm; la corteccia, color ocra chiara, si stacca in placche irregolari. Abbondantemente utilizzati per alberature di viali e giardini, questi alberi derivano probabilmente da un ibrido⁸ fissato almeno 3 secoli fa.

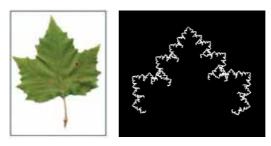


Figura 3.31: Foglia di platano.

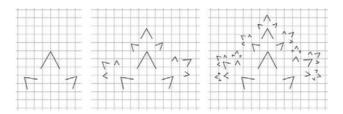


Figura 3.30: Costruzione della simulazione.

La figura di base per la simulazione è costituita da 3 parti. Viene inserita riscalata e ruotata in 3 punti. Il processo viene iterato il maggior numero possibile di volte; nel risultato finale, a differenza di quanto fatto negli esempi precedenti, viene tracciato solo l'ultimo livello e non vengono quindi disegnati i livelli intermedi.

⁸ Organismo prodotto dall'accoppiamento di due specie diverse.

Cavolo romano

I Cavoli sono coltivati in Italia e Francia da almeno 2000 anni. In particolare, il Cavolo Romano e il Cavolfiore hanno una infiorescenza contratta con assi ingrossati e fiori rudimentali. In essi è ben visibile la ripetizione della struttura di base in almeno 3–4 livelli a partire da quello di dimensioni minori. I cavoli svolgono un ruolo importante nell'alimentazione umana, in quanto si ambientano bene nei climi temperato freddi, con la produzione centrata nel periodo invernale.



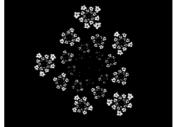


Figura 3.33: cavolo romano.

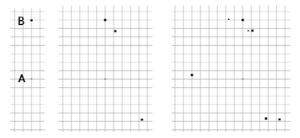


Figura 3.34: Costruzione della simulazione.

La simulazione del cavolo romano viene fatta partendo dalla figura di base che è costituita da due punti nel piano, A e B. Il primo passo dell'iterazione consiste nell'inserire due copie della figura di base (i punti A e B) la prima volta facendo ruotare B attorno ad A di $137^{\circ}30$ ' e riscalando di un fattore di poco inferiore ad 1, la seconda volta facendo ruotare il punto B della copia attorno al punto B della figura di base nuovamente di $137^{\circ}30$ ' ma riscalando di un fattore 1/4. L'iterazione viene ripetuta il massimo numero di volte possibili.

3.5 *L'insieme di Mandelbrot

I frattali che abbiamo finora visto sono esempi particolari, sufficienti probabilmente per schematizzare l'aspetto di alcune piante, ma rappresentano una piccola parte dei possibili frattali che si possono costruire con strumenti matematici. Una ricerca in rete di immagini di frattali dà, più di ogni altra spiegazione, una chiara idea di quale aspetto possano assumere queste figure geometriche. Probabilmente il frattale più famoso e spettacolare è l'insieme di Mandelbrot, introdotto e studiato dal matematico polacco, naturalizzato francese, Benoît Mandelbrot (Varsavia, 1924 -Cambridge (U.S.A.) 2010) negli anni '80 del secolo scorso. Ad essere precisi, l'insieme di Mandelbrot non soddisfa la proprietà basilare di autosimilarità che abbiamo precedentemente introdotto e utilizzato, anche se tale caratteristica si presenta per alcune sue parti. Ciò nonostante il suo aspetto così frastagliato e complesso fa sì che sia pur sempre classificato come un frattale.

Vediamo ora brevemente come nasce l'insieme di Mandelbrot. Fissiamo innanzitutto un punto P del piano di coordinate (a, b); consideriamo poi una trasformazione f del piano data dalla seguente legge:

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2 + a \\ y' = 2xy + b \end{cases}$$

Questa legge va quindi intesa nel seguente modo: al punto del piano di coordinate (x, y), f fa corrispondere il punto di coordinate (x', y') come indicato nella formula, cioè f(x, y)=(x', y').

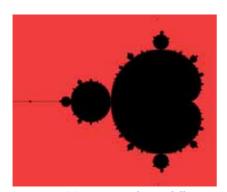


Figura 3.35: Insieme di Mandelbrot

Come si vede, f dipende dal punto P fissato in partenza, in quanto le coordinate (a, b) di P compaiono nella definizione di f.

Applichiamo ora f al punto P stesso. Otteniamo così un nuovo punto $P_1 = f(P)$. A partire da P_1 possiamo allora ottenere il punto $P_2 = f(P_1)$ e così via cioè, usando una notazione ricorsiva che abbiamo già incontrato nei capitoli precedenti, definiamo: $P_n = f(P_{n-1})$. In questo modo costruiamo una successione di punti nel piano P_1, P_2, P_3, \dots Tanto per fare un esempio, se P ha co-

ordinate (-1, 1), allora $f(P) = ((-1)^2 - 1^2 - 1, 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 1) = (-1, -1)$, quindi $P_1 = (-1, -1)$. Allora $f(P_1) = ((-1)^2 - (-1)^2 - 1, 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1) = (-1, 3)$, pertanto la successione che otteniamo incomincia con i punti di coordinate:

$$(-1, 1), (-1, -1), (-1, 3), (-9, -5), (55, 91), (-5257, 10011),...$$

Rappresentando questi punti sul piano, vediamo che si allontanano sempre di più dall'origine degli assi cartesiani. Se invece partiamo dal punto P di coordinate (0, -1) otteniamo la successione di punti:

$$(0,-1), (-1,-1), (0,1), (-1,-1), (0,1), (-1,-1), (0,1),...$$

che, come si vede, da un certo punto in poi si ripete periodicamente e quindi, al contrario dell'esempio precedente, i punti della successione rimangono in una regione limitata del piano. Allora i punti P(a, b) del piano si possono dividere in due categorie: quelli per cui la successione (P_n) rimane in una regione limitata e i restanti, quelli cioè per cui la successione (P_n) "scappa" sempre più lontano.

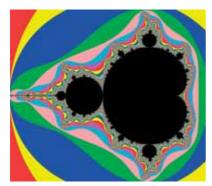


Figura 3.36: Insieme di Mandelbrot

Si chiama *insieme di Mandelbrot* l'insieme dei punti P del piano per i quali la successione (P_n) è limitata. Se coloriamo di nero i punti dell'insieme di Mandelbrot e di rosso i rimanenti, otteniamo la figura 3.35. Ma questo non è che l'inizio. Possiamo essere più raffinati nel distinguere i punti che "scappano": anziché colorarli di rosso, possiamo usare colori differenti per diversificare le "velocità" con cui scappano. Otteniamo così figure come la 3.36, dove si sono utilizzati 7 colori per differenziare i punti fuori dalla regione nera. Inoltre si può focalizzare l'atten-

zione su una regione ristretta dell'insieme di Mandelbrot e quindi disegnare un suo ingrandimento. Si ottengono in questo caso disegni affascinanti, due dei quali sono riportati in figura 3.37.

3.6 Appendice: il software

Le figure di frattali abbinate alle piante presentate in questo capitolo sono state ottenute con l'utilizzo di un software appositamente costruito che si può trovare sul sito:

http://www.dmi.units.it/~logar/mescef (alla voce: applet frattali). Qui diamo alcune indicazioni sul suo utilizzo. Come detto nella sezione 3.2, la costruzione di un frattale può essere fatta attraverso 4 fasi. Il software prevede proprio di procedere un passo alla volta, seguendo le indicazioni date nella sezione 3.2, come segue:

- 1. Quando è selezionato il pulsante Passo 1, si può tracciare un disegno nella griglia trascinando opportunamente il mouse del computer. Il disegno che si viene a costruire è composto da segmenti. In questa fase si attiva un pulsante che permette di cancellare, a ritroso, i segmenti tracciati.
- 2. Una volta costruita la figura voluta, si può passare alla seconda fase, selezionando il pulsante Passo 2. Il programma permette ora di selezionare alcuni punti nella griglia che sono i punti in cui verrà inserita una copia del disegno precedentemente tracciato. I punti inseriti vengono evidenziati con un quadratino (il numero massimo è 9). Anche in questo caso si attiva un bottone che permette di cancellare (sempre a ritroso) i quadratini tracciati.
- 3. Si procede quindi al Passo 3. Il programma disegna la figura costruita nel passo 1 tante volte quante indicate nel passo 2. Le figure che vengono ridisegnate, sono scalate della metà. In questa fase l'utente può scegliere di ruotare e riscalare o solo ruotare o solo riscalare o, infine, traslare una alla volta —le figure disegnate. Per far ciò basta selezionare l'operazione desiderata nel riquadro Movimenti passo 3 e modificare le figura trascinando il piccolo



Figura 3.37: Alcune zumate sull'insieme di Mandelbrot

- cerchio che compare su ognuna di esse. Conclusa questa terza fase, il programma ha tutte le informazioni per tracciare il frattale.
- 4. Passo 4: il programma mostra la figura di base del frattale (quella tracciata nel passo 1). Si può modificare il livello o selezionando uno dei 3 pulsanti min, med, max o si può incrementare/decrementare il livello di ricorsione di una unità alla volta, utilizzando i pulsanti +1, −1. Il riquadro trasla frattale permette inoltre di spostare (in accordo con le frecce) il disegno globale.

È possibile ritornare dal passo 4 ad un passo precedente, però attenzione che il passaggio al passo 1 o 2 fa perdere le informazioni fornite nel passo 3. Ancora alcune indicazioni sul menù che compare in alto a sinistra. Esso permette di effettuare varie scelte inerenti alle modalità del disegno (presenza o meno della griglia o degli assi, colore di fondo). La voce attiva una finestra che, se si è raggiunto il passo 4, indica le coordinate dei vari punti inseriti, gli angoli delle rotazioni e i fattori di scala. Questa finestra può essere utile sia quando si vogliano apporre lievi modifiche al disegno sia quando si voglia inserire un disegno per mezzo dei dati numerici. Ad esempio la simulazione della pigna (v. pag. 60), che richiedeva un'attenta disposizione della figura di base, è stata prima ottenuta tracciando un'approssimazione del disegno e successivamente, agendo sui dati della finestra di I/O, è stata trovata con la dovuta precisione. La voce disegna ogni livello, se attiva, disegna il frattale partendo dalla figura di base e da tutte le sue ripetizioni riscalate fino all'ultimo livello; se non è attiva, disegna solamente l'ultimo livello, come fatto nell'esempio della foglia di platano (v. pag. 63).

Per meglio capire l'utilizzo del software, non resta che sperimentarlo.

Nota relativa alle immagini

La maggior parte delle figure utilizzate sono state prodotte dagli autori. Alcune fotografie sono state tratte dalla rete. Più precisamente:

- Figura 1.3: http://it.wikipedia.org/wiki/Brattea
- Figura 2.4: http://it.wikipedia.org/wiki/Partenone
- Figura 2.3: http://it.wikipedia.org/wiki/Atena
- Figura 2.5: http://en.wikipedia.org/wiki/Headquarters of the United Nations
- Figura 3.1: http://maps.google.it/ (costa istriana nei pressi di Krnica (Carnizza) (HR))
- Figura 3.2 e figura 3.33: http://www.qualitaeprestigio.it/
- Figura 3.19: http://commons.wikimedia.org/wiki/File%3ADictyota dichotoma 1 Crouan.jpg
- Figura 3.31: http://scuolevenezialido.net/vpisani/alberi/schede/platano.htm

Bibliografia

- [1] Abate M., *Il girasole di Fibonacci*, Matematica e cultura 2007. Emmer M. (a cura di) 227-240. Italia, Sprinter (2007).
- [2] Barrow John D., Perché il mondo è matematico? Laterza, Roma-Bari (1992).
- [3] Comicioli V., *Biomatematica: interazioni tra le scienze della vita e la matematica*. Cap. 5. Forme e modelli nei sistemi biologici Italia, Apogeo (2006) (E book).
- [4] Douady S.; Couder Y., *Phyllotaxis as a self-organized growth process*, Physical Review Letters 64 pp. 2098–2101 (1992).
- [5] Genzo C. La variabilità in grandezze discrete. Elementi fiorali e successione di Fibonacci, Nuova Secondaria, anno XVI, n. 3, 90—93. Brescia (1998).
- [6] Genzo C.; Zuccheri L. *Una passeggiata matematica*, Univ. Studi Trieste. Dip. Matem. e Inf., Civ. Orto Bot., Comune di Trieste (2009) (ristampa).
- [7] Lesmoir; Gordon N.; Rood W.; Edney R., *I frattali a fumetti* R. Cortina Ed., Milano (2010).
- [8] Livio M. La sezione aurea -Storia di un numero e di un mistero che dura da tremila anni Rizzoli, Milano (2003).
- [9] Mandelbrot B., *Gli oggetti frattali. Forma, caso e dimensione*. Einaudi, Torino (1987 e 2000).
- [10] Naylor M., Golden, $\sqrt{2}$, and π Flowers: A Spiral Story, Mathematics Magazine, Vol. 75, N. 3, 163–172 (2002).
- [11] Posametier A.S.; Lehmann I., *The fabulous Fibonacci numbers*, Prometheus box. New York (2007).
- [12] Prusinkiewicz P.; Lindenmayer, A., *The Algorithmic Beauty of Plants* Springer-Verlag. (1990). disponibile anche sul sito: http://algorithmicbotany.org/papers/
- [13] Ridley J.N., *Packing efficiency in sunflower heads*, Mathematical Biosciences, Vol. 58, 129–139 (1982).
- [14] Stewart I., L'altro segreto della vita. La nuova matematica e gli esseri viventi. Cap. 6: Fiori per Fibonacci. 176–196. Longanesi.
- [15] Vogel H., A better way to construct the sunflower head. Mathematical Biosciences, Vol. 44, 179–189 (1979).

Indice

1	Margherite e spirali	pag.	7
1.1	Sfogliando una margherita: da "m'ama, non m'ama" alla successione di Fibonacci	,,	7
1.2	Dalle circonferenze alle spirali	"	12
1.3	Un modello matematico	,,	15
1.4	Simulazioni	,,	20
1.5	Appendice: il software	,,	27
2	Intermezzo matematico-artistico	,,	29
2.1	Sezione aurea	,,	29
2.2	Un'incursione nell'arte	,,	32
2.3	Un approfondiamento matematico	,,	33
2.3.1	*Legami tra φ e Fibonacci	,,	34
2.3.2	*Il pentagono regolare	,,	38
2.3.3	*Dal rettangolo aureo alla spirale aurea	,,	40
3	Cavolfiori e Frattali	,,	43
3.1	Una passeggiata infinita	,,	43
3.2	Osservando un cavolo ed altre piante		44
3.3	Un po' di conti	,,	47
3.4	Simulazioni	,,	50
3.5	*L'insieme di Mandelbrot	,,	65
3.6	Annendice: il software	,,	67



ortobotanico@comune.trieste.it